DJC2E - BUSINESS MATHEMATICS AND STATISTICS

Unit I

Business statistics – meaning – definition – uses and limitations – collection of primary and secondary data – sampling methods

Unit II

Measurement of central tendency – mean, median, mode, geometric mean, harmonic mean – advantages and disadvantages and calculation – measures of dispersion – range, quartile deviation, mean deviation, standard deviation – advantage, disadvantage and calculation – Skewness – Karlpearlson and Bowley's Coefficient of Skewness

Unit III

Correlation – meaning – types – calculation of Karlpearlsons co-efficient of correlation – rank correlation (only individual observation). Regression – meaning – calculation of X value and Y value – time series – meaning – components – uses – calculations, moving average – seasonal index and trend value by straight line method

Unit IV

Analytical geometry – point of distance between two points – slope of straight line – business application – modeling by liner functions

Unit V

Algebra – theory of indices – zero and negative indices – (without fractional indices – laws of indices – matrics – concepts – proof) – multiplication – matric inverse – solving

புள்ளியியல் வரையறைகள், நோக்கங்கள் மற்றும் வரம்புகள்

அறிமுகம்

கணினிகளும், தகவல் தொழில் நுட்பங்களும் நிறைந்த நவீன உலகில், புள்ளியியலின் முக்கியத்துவம், மிக நன்றாக அனைவராலும் உணரப்படுகிறது. புள்ளியியலானது, அறிவியல் சார்ந்த அரசுப் பணிகளில் ஆரம்பித்து, விவசாயம், பொருளியல், வணிகவியல், உயிரியல், மருத்துவம், தொழில்துறை, திட்டமிடல், கல்வி போன்ற பல துறைகளில், அதன் பயன்பாடுகள் வளர்ந்து கொண்டே வருவதைக் காண்கிறோம். இன்றைய நிலையில் புள்ளியியல் பயன்படுத்தப்படாமல் மனித வாழ்விற்கு வளர்ச்சி இராது எனலாம்.

புள்ளியியலின் தோற்றமும் வளர்ச்சியும்

‘புள்ளியியல்’ என்ற வார்த்தை ‘ஸ்டேட்டஸ்’ என்ற லத்தீன் சொல்லிலிருந்து பிறந்தது. ‘ஸ்டேட்டஸ் என்னும் சொல்லிற்கு ‘அரசு’ என்பது பொருள். தற்போதைய வளர்ச்சியடைந்த நிலையை ஒப்பிடும் பொழுது, புள்ளியியல் கொள்கை, அறிவியல் முறைகளில் தனி முத்திரை பதித்து வருகிறது. குறிப்பாக புள்ளியியலில் நடத்தப்படும் கணிதக் கொள்கை ஆய்வுகள் வேகமாக வளர்ச்சியடைந்து புதிய கண்டுபிடிப்புகளை உலகம் முழுவதும் உருவாக்கி வருகிறது.

புள்ளியியலின் விளக்கம்

விவரங்களைச் சேகரித்து, முறையாக சுருக்கி அளிப்பதுடன், ஆய்வின் அடிப்படையில் தக்க காரணத்துடன் சரியான முடிவெடுப்பதால் புள்ளியியல் அறிவியல் முறையுடன் தொடர்புடையது. எண் விவரங்களை முறையாகச் சேகரித்து மேலும் தெளிவாக்குவதுடன் புள்ளியியல் தொடர்புடையது. ‘புள்ளி விவரம்’ என்ற சொல்

1. ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் வசிக்கும் மக்களின் எண்ணிக்கை, அதாவது விவரம்

2. விவரங்களை சேகரித்து, பகுத்தாய்வு செய்து, தெளிவாக்கும் முறை என்பதைக் குறிப்பதற்கு பயன்படுத்தப் படுகிறது.

வரையறைகள்

பல்வேறு கால கட்டங்களில் புள்ளியியல் வெவ்வேறு ஆசிரியர்களால் வெவ்வேறு விதமாக வரையறுக்கப்படுகிறது. முன்பு புள்ளியியல் என்பது அரசு தகவலுக்கு மட்டுமே இருந்து வந்தது, இக்காலத்தில் மனித நடவடிக்கையின் ஒவ்வொரு செயலையும் சார்ந்துள்ளது. எனவே குறிப்பிட்ட துறைக்கு மட்டுமே உட்பட்ட பழைய வரையறைகளுக்குப் பதிலாக, முற்றிலும் எல்லாவற்றிற்கும் பொருந்துமாறு உள்ள புதிய வரையறைகள் உருவாக்கப்படுகின்றன. மேலும் புள்ளியியல் என்பது புள்ளியியல் விவரங்கள், புள்ளியியல்

ஆய்வு முறைகள் என்று இரு விதமாக வரையறுக்கப்படுகின்றன. புள்ளியியலை எண் விவரங்களாகக் கொண்ட சில வரையறைகள் பின்வருமாறு

1. ஓர் இடத்திலுள்ள மக்களின் வாழ்க்கை நிலையைப் பொறுத்து திரட்டப்படும் தகவல்களை வகைப்படுத்தல். குறிப்பாக இவை எண்ணிக்கை அடிப்படையில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டு, வகைப்படுத்தப்பட்ட முறையில் அமைந்திருக்கும்.
2. அளவிடுதல், கணக்கிடுதல், அல்லது தினப்படி இயற்கை நிகழ்வுகளை மதிப்பிடுதல், திட்டமிடுதல், முறைப்படுத்தல், பகுத்துக் கொள்ளல் அவற்றிற்கிடையேயுள்ள முக்கிய தொடர்புகளை வெளிப்படுத்தல் ஆகியன.

கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடனின் வரையறை

'புள்ளியியல் என்பது எண் விவரங்களை சேகரிப்பது, அளிப்பது, பகுத்தாய்வது, மற்றும் விளக்கமளிப்பது என வரையறுக்கப்படலாம்' அளவையியல் பகுப்பாய்வின் படி இவர்களின் வரையறையானது, அறிவியல் பூர்வமாகவும் மிகச் சரியாகவும் உள்ளதைத் தெளிவாகக் காட்டுகிறது. இவ்வரையறையின் படி நான்கு நிலைகள் உள்ளன.

1. விவரங்களைச் சேகரித்தல்

இதுவே முதல் படியாகவும், மற்ற முறைகளுக்கு அடித்தளமாகவும் உள்ளது. விவரங்களை சேகரிப்பதற்கு முன்னர் கவனமாகத் திட்டமிடல் வேண்டும். விவரங்களைச் சேகரிப்பதில் முழுக்கணிப்பு முறை, மாதிரி கணிப்பு முறை, முதல் நிலை விவரங்களைச் சேகரித்தல், இரண்டாம் நிலை விவரங்களை சேகரித்தல் போன்ற வெவ்வேறு முறைகள் உள்ளன. ஆய்வு செய்பவர் சரியான முறையைப் பயன்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும்.

2. விவரங்களை அளித்தல்

அடுத்து வரும் ஆய்வுகளுக்கு உதவும் முறையில், மிகச் சுருக்கமாகவும், பொருத்தமாகவும் சேகரித்த விவரங்கள் முழுமையும் அளித்தல் வேண்டும். அவ்விவரங்களை அட்டவணையாகவோ விளக்கப்படமாகவோ, வரைபடமாகவோ அளிக்கலாம்.

3. விவரங்களின் பகுப்பாய்வு

மைய ஈர்ப்பு அளவைகள், மாறுபாட்டளவை, ஒட்டுறவு, உடன் மாறுபாடு போன்ற அளவைகளை உய்த்துணர்வதற்கு சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் கவனமாக ஆய்வு செய்யப்பட வேண்டும்.

4. விளக்கமளித்தல்

இறுதியாக சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களில் இருந்து ஒரு முடிவைப் பெறுதல் வேண்டும். இதுவே விளக்கமளித்தல் ஆகும். பகுப்பாய்வின் அடிப்படையில் ஏற்புடைய முடிவு எடுக்கப்பட வேண்டும். விளக்கமளிப்பதற்கு மிகச் சிறந்த திறமையும் அனுபவமும் அவசியம்.

புள்ளியியலின் பணிகள் (Functions of Statistics)

புள்ளியியலில் பல பணிகள் உள்ளன. முக்கியமான ஐந்து பணிகள் பின்வருமாறு.

சுருங்கக் கூறுதல் (Condensation)

பொதுவாக கூறுமிடத்து ‘சுருங்கக் கூறு’ என்ற சொல்லுக்கு குறைப்பது அல்லது சுருக்குவது என்று பொருள். கொடுக்கப்பட்ட சில மதிப்புகளில் மிக அதிக விவரங்களின் தொகுப்பைப் புரிந்து கொள்ள வைப்பதே சுருங்கக் கூறுதலின் முக்கிய நோக்கம் ஆகும். குறிப்பாக, சென்னையில் உள்ள பள்ளியில் ஒரு வகுப்பின் தேர்வு மதிப்பெண்கள் மட்டும் கொடுக்கப்பட்டால், நமக்குத் தெளிந்த கருத்து கிடைக்காது. அதற்கு பதிலாக அத்தேர்வின் சராசரி மதிப்பெண் ஒரு தெளிவான கருத்தைக் கொடுக்கும். இதே போல் மதிப்பெண்களின் வீச்சு அவ்விவரங்களின் மற்றொரு சிறந்த அளவையாகும். இவ்வாறாக நிறைய விவரங்கள் கொண்ட தொகுப்பைப் புரிந்து கொள்வதில் உள்ள சிக்கல்களை புள்ளியியல் அளவைகள் குறிக்கின்றன.

ஒப்பிடல் (Comparison)

வகைப்படுத்துதல், அட்டவணைப்படுத்துதல் என்ற இரு முறைகளும் விவரங்களைச் சுருங்கக் கூறுவதற்கு உதவுகின்றன. இவை சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை ஒப்பிடப் பயன்படுகிறது. கூடுதல்கள், மையப் போக்கு அளவைகள், சிதறல் அளவைகள், வரைபடங்கள், விளக்கப் படங்கள், ஒட்டுறவுக் கெழு போன்றவை போதுமான அளவு ஒப்பிடுவதற்குப் பயன்படுகின்றன. விவரங்களின் ஒரு வரைபடம் இருந்தால், அவற்றின் தொடர்பை ஒப்பிட இயலும் தஞ்சை மாவட்டத்தின் அரிசி உற்பத்தி அளவு தெரிந்தால், அம்மாவட்டத்தில் உள்ள ஒரு பகுதி உற்பத்தியை மற்றொரு பகுதி உற்பத்தியுடன் ஒப்பிட இயலும். தமிழ்நாட்டில் உள்ள இரு வெவ்வேறு மாவட்டங்களின் அரிசி உற்பத்தி அளவு தெரிந்தால், ஒப்பீட்டாய்வு காண இயலும். புள்ளியியல் என்பது நிகழ்வுகள் மற்றும் எண்களின் ஒட்டு மொத்த தொகுதியாக இருப்பதால், எப்பொழுதும் ஒப்பிட இயலும். உண்மையில், ஒப்பிடுதல் விவரங்களை நல்ல முறையில் புரிந்து கொள்ள உதவுகிறது.

முன்னறிதல் (Forecasting)

‘முன்னறிதல்’ என்பதன் பொருள் முன் கூட்டியே அறிவதற்காக மதிப்பீடு செய்தல், அல்லது முன்பாகவே கணித்தல் ஆகும். தமிழ்நாட்டில் மாவட்டங்களில் கடந்த பத்தாண்டுகளில் பெய்த மழையளவு விவரம் கொடுக்கப்பட்டால், வரப்போகும் காலத்திற்கான மழையளவை முன்பாக அறிவிக்க இயலும். வணிகத் துறையில் ‘முன்னறிதல்’ என்பது உற்பத்தி, விற்பனை, இலாபம் போன்றவற்றுடன் மிக அதிக அளவு தொடர்புடையது, காலத்தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு, உடன் தொடர்புப் பகுப்பாய்வு என்பன முன்பாக மதிப்பீடு செய்து அறிவிக்க முக்கியமானவை ஆகும்.

முன்கூட்டி மதிப்பிடுதல் (Estimation)

முழுமைத் தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரிக்கூறு பகுப்பாய்வின் மூலம் முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி உய்த்துணர்வதே, புள்ளியியலின் முக்கிய குறிக்கோள் ஆகும். புள்ளியியல் உய்த்துணர்தலில் உள்ள முக்கிய நான்கு பிரிவுகளாவன.

1. முன்கூட்டி மதிப்பிடுதல்
2. எடுகோள் சோதனைகள்
3. பண்பளவைச் சாரா சோதனைகள்
4. தொடர் பகுப்பாய்வு

முன்கூட்டி மதிப்பிடுதலில், மாதிரிக்கூறு மதிப்புகளின் அடிப்படையில் தெரியாத தொகுதிப் பண்பளவை மதிப்பீடு செய்யப்படுகிறது. ஒரு பள்ளியில் உள்ள ஏதேனும் நூறு மாணவர்களை மாதிரிக் கூறாகக் கொண்டு, அவர்களின் உயரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அப்பள்ளி மாணவர்களின் சராசரி உயரத்தை மதிப்பிட இயலும்.

எடுகோள் சோதனைகள் (Test of Hypothesis)

மாதிரிக்கூறு மதிப்புகளிலிருந்து கிடைக்கப் பெற்ற தகவல்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு, முழுமைத் தொகுதியின் பண்புகளையும் நிகழ்தகவு பரவல்களையும் பற்றிய கூற்றுகளே புள்ளியியல் எடுகோள்கள் ஆகும். எடுகோள்களை உருவாக்குவதிலும், அவற்றை சோதனை செய்வதிலும் புள்ளியியல் முறைகள் மிக அதிக அளவில் பயன்படுகிறது. புதிய உரத்தின் பயனாக விளைச்சல் அதிகரித்துள்ளதா, அல்லது புதிய மருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட நோயைத் தீர்ப்பதில் அதிக சக்தியுடன் செயல்படுகிறதா? போன்ற கூற்றுகள் எடுகோள்களுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும். அவை தகுந்த புள்ளியியல் முறைகள் மூலம் சோதனை செய்யப்பட வேண்டும்.

புள்ளியியலின் நோக்கம் (Scope of Statistics)

புள்ளியியல் என்பது புள்ளி விவரங்களை சேகரிக்கும் கருவியாக மட்டுமேயல்லாமல் அதன் சரியான யுக்திகளைக் கையாள்வதன் மூலமும் பகுப்பாய்வு செய்வதன் மூலமும் அவ்விவரங்களில் இருந்து சரியான உய்த்துணர்தலைக் கொண்டு வர இயலும். மனிதச் செயல்பாடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் புள்ளியியல் பயன்படுத்தப்படுகின்றது. உயிரியல், வணிகவியல், கல்வி, திட்டமிடல், வணிகமேலாண்மை, தகவல் தொழில்நுட்பத்துறை போன்ற சமூகம் சார்ந்த துறைகளிலும் பயன்படுகிறது. புள்ளியியல் பயன்படாத துறையே காண இயலாது எனலாம். புள்ளியியலின் பல்துறைப் பயன்பாடுகள் பற்றிச் சுருக்கமாக இங்கு காணலாம்.

புள்ளியியலும் தொழில் துறையும்

புள்ளியியல் என்பது பல தொழிலகங்களில் விரிவாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. தொழிலகங்களில் தரக்கட்டுப்பாட்டுப் படங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட தர நிலையை நீடிக்கச் செய்ய

பயன்படுகிறது. உற்பத்தி பொறியியலில், உற்பத்தியானது குறிப்பிட்ட நிலையளவை நிறைவு செய்கிறது என்பதில் ஆய்வு திட்டங்கள், தரக்கட்டுப்பாட்டு படங்கள் போன்ற புள்ளியியல் கருவிகளின் தேவை மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை. ஆய்வுத் திட்டத்தில் நமக்குப் புகலிடம் அளிக்கும் மாதிரிக் கணிப்பு முறையே புள்ளியியலின் மிக முக்கிய அம்சமாகும்.

புள்ளியியலும் வணிகவியலும்

வெற்றிகரமான வணிகத்திற்கு புள்ளியியலே உயிர்த்துடிப்பாகும். எந்த ஒரு வியாபாரியும், பொருள்களில் மிகக் குறைவான இருப்பையோ அல்லது மிக அதிகமான இருப்பையோ வைத்திருக்க இயலாது. ஆரம்பத்திலேயே, அவரது பொருளுக்கான தேவையையும், அதற்கான அவரது வெளியீடுகள் அல்லது வாங்குதல் மூலம் சரிசெய்யும் தன்மையையும் மதிப்பீடு செய்கிறார். எனவே வியாபாரம் மற்றும் வணிகவியலில் இருந்து புள்ளியியலைப் பிரிக்க இயலாது. இந்திய பொருளாதாரத்தில், பல வெளிநாட்டு நிறுவனங்கள் நுழைந்திருப்பதால் வியாபாரத்தின் அளவு பெருகியுள்ளது. ஒரு புறத்தில் கடுமையான போட்டி அதிகரித்த போதிலும் மறுபுறத்தில் விருப்பங்கள் மாறுபடுவதால் புதிய நாகரீகம் நுழைகிறது. இதன் தொடர்பாக தற்போதைய நிலை மற்றும் எதிர்காலத்தில் ஏற்படும் மாற்றங்களைப் பற்றி அறிவதற்கும் சந்தை ஆய்வு மிக முக்கியமானது. குறியீட்டெண்கள், காலத் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு, மதிப்பீட்டுக் கொள்கை, புள்ளியியல் எடுகோள் சோதனைகள் போன்ற புள்ளியியல் கருவிகள் பொருளியலில் மிக அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

புள்ளியியலும் விவசாயமும்

மாறுபாட்டளவை பகுப்பாய்வு (Analysis of Variance) என்பது பேராசிரியர் R. A பிஷர் என்பவரால் உருவாக்கப்பட்ட புள்ளியியல் கருவியாகும். இது விவசாயத் துறை சோதனைகளில் மிகப் பிரபலமான ஒன்று. சிறு கூறுகளுக்கான சிறப்புச் சோதனைகளில், இரு மாதிரிக் கூறுகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு சிறப்பு வாய்ந்தது என்பதைக் காட்டுகிறது. மாறுபாட்டளவை பகுப்பாய்வில் பல்வேறு முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகளில் சமதன்மையையும் சோதிக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, கோதுமை பயிரிடப்பட்ட ஐந்து நிலப்பகுதிகளுக்கு ஐந்து இரசாயன உரங்கள் இட்டு, அதன் விளை பலன்கள் கணக்கிடப்படுகின்றன. இந்த வெவ்வேறு உரங்களால் விளை பலன்களின் அளவு குறிப்பிடத் தகுந்த அளவு வேறுபடுகின்றதா அல்லது அந்த கூறு ஒரே தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருக்குமா என நாம் காண விழையலாம். இப்பிரச்சனைக்கான தீர்வை மாறுபாட்டளவைப் பகுப்பாய்வு அளிக்கிறது. பல தொகுதி சராசரிகளின் ஒரே தன்மையை சோதிப்பதற்கும் பயன்படுகிறது.

புள்ளியியலும் பொருளியலும்

சிக்கல் நிறைந்த தொகுதியின் எண்ணளவு மாற்றங்களை அளக்கவும் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களைத் தெளிவாக விளக்கவும் புள்ளியியல் முறைகள் பயன்படுகின்றன. தற்காலத்தில் புள்ளியியலின் பயன்கள், பொருளியியல் ஆய்வில் ஏராளமாக உள்ளன.

பொருளியல் கொள்கை, அதன் செயல்பாடு இரண்டிலும் புள்ளியியலின் பங்கு மிக முக்கியமானது. ஆல்பிரட் மார்ஷெல் என்ற பொருளியலாளர், 'புள்ளியியல் என்பது சிறிய குச்சிகளை போன்றதே. இதை வைத்து கொண்டே பொருளியியல் வல்லுநர்கள் வீட்டை எழுப்ப வேண்டும் என்று விரும்புகிறேன்' என்று கூறியிருக்கிறார். பொருளாதாரப் பிரச்சனைகளான ஊதியம், விலை, உற்பத்தி, வருமானம் மற்றும் செல்வம் இவற்றின் பங்கீடுகள் ஆகியவற்றைத் தீர்ப்பதில் புள்ளி விவரங்களும், புள்ளியியல் கருவிகளும் மிக அதிக அளவில் பயன்படுகின்றன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

புள்ளியியலும் கல்வியும்

கல்வியில், புள்ளியியல் பரவலாகப் பயன்படுத் தப்படுகிறது. எல்லாவகை செயல்பாட்டுப் பிரிவுகளிலும் ஆய்வு என்பது மிகப் பொதுவான குணமாகும். கொள்கை உருவாக்கத்திற்கும், புதிய பாடவழியை அறிமுகப் படுத்துவதற்கம் புதிய பாட வழிகளில் உள்ள வசதிகளைத் தருவதற்கும் தேவையானது புள்ளியியல். பழைய கல்வி திட்டத்தில் இருந்து புதிய கல்வி திட்டத்தை மதிப்பீடு செய்யும் சோதனை ஆய்வில் அதிகமாக மக்கள் ஈடுபடுத்தப்படுகின்றனர். இவையனைத்தும் புள்ளியியல் மூலமாக நடைபெறக் கூடியது.

புள்ளியியலும் திட்டமிடலும்

புள்ளியியல், திட்டமிடலில் மிக இன்றியமையாத ஒன்றாகும். நவீன உலகமானது 'திட்டமிடப்பட்ட உலகம்' என்று அழைக்கப்படுகிறது. கொள்கை முடிவு உருவாக்கத்திற்கும் அதை அமல்படுத்தும் திறமையான வேலைக்காக அரசாங்கத்தின் அனைத்து நிறுவனங்களும் திட்டமிடுதலின் உதவியை நாடுகின்றன. மேலே குறிப்பிடப்பட்ட நோக்கத்தில் வெற்றியடைய, உற்பத்தி, நுகர்தல், தேவை, அளிப்பு, விலைகள், முதலீடுகள் வரவு செலவு போன்றவற்றுடன் தொடர்புடைய புள்ளி விவரங்களும், வேறு பல முன்னேற்றமடைந்த புள்ளியியல் யுக்திகளும் நடைமுறைப் படுத்துதல், பகுத்தாய்வு செய்தல், தெளிவாக்குதல் போன்ற சிக்கலான விவரங்களில் பயன்படுத்தப்படும் முன்னேற்றமடைந்த பல்வேறு புள்ளியியல் யுக்திகளும் முக்கியமானவை. இந்தியாவில் மத்திய மற்றும் மாநில அரசு இரண்டிலும் உள்ள திட்டக் குழுவில் புள்ளியியலின் பங்கு மிக முக்கியமானது.

புள்ளியியலும் மருத்துவமும்

மருத்துவ அறிவியலில் புள்ளியியல் கருவிகள் மிக அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. ஒரு புதிய மருந்தின் செயல்திறனை அறிய t-சோதனை மேற்கொள்ளப்படுகிறது. இரு வகை மருந்துகளின் செயல் திறன்களை ஒப்பிட இரு மாதிரிக் கணிப்பிற்கான t-சோதனையைப் பயன்படுத்தி ஒப்பிடப்படுகிறது. தற்போதுள்ள மருத்துவ ஆய்வுகளில் புள்ளியியலின் பயன்பாடுகள் மேன் மேலும் அதிகரித்துக் கொண்டே வருகின்றன.

புள்ளியியலும் அதன் நவீன பயன்பாடுகளும்

சமீபத்தில் வளர்ச்சி பெற்று வரும் கணினி மற்றும் தகவல் தொழில் நுட்பத் துறை, புள்ளியியல் பயன்பாட்டை அதிகரித்து புதிய மாதிரி வடிவங்களை ஒருங்கிணைத்து

உருவாக்க வேண்டியுள்ளது. இப்புள்ளியியல் மாதிரி வடிவங்களிலிருந்து பல்வேறு நிறுவனங்கள், சில முடிவுகளைப் பெற முடிகிறது. சோதனைத் திட்ட அமைப்பு, முன் மதிப்பீடு செய்தல், சூழ்நிலை உருவாக்கும் கணக்குகள் போன்றவற்றின் தீர்விற்காக நிறைய மென்பொருட்கள் கிடைக்கின்றன. SYSTAT என்ற கணினி மென்பொருள், அறிவியல் மற்றும் தொழில் நுட்ப வரைப்படங்களை புள்ளியியல் விவரங்ளைக் கொண்டு தருவதில் மற்றெந்த மென்பொருட்களைக் காட்டிலும் சிறந்து விளங்குகிறது.

பல்வேறுபட்ட ஆய்வுகளுக்கு SYSTAT பயன்படுத்தப்படுகிறது. அவற்றுள் சில

1. தொல்லியல் மண்டை ஓடுகளின் தொன்மை பற்றி ஆராய்தல்.
2. தொற்று நோய் நெஞ்சக, நுரையீரல் நோய் பற்றி ஆய்வு செய்வதற்காக.
3. புள்ளியியல் பரவல்களின் போக்கு பற்றி ஆராய்தல்.
4. உற்பத்தி தரம் உயர்த்துவதற்கான ஆய்வு.
5. மருத்துவம் நோய்களைப் பற்றி ஆராய்தல்.
6. நிலவியல் நிலத்தடி நீரில் உள்ள யுரேனியம் போன்றவற்றின் அளவினை ஆராய்தல்.

புள்ளியியலின் வரம்புகள்

புள்ளியியலின் பயன்பாடுகள், மனித செயல்களின் ஒவ்வொன்றிலும் பரவலாக இருந்தாலும், அவற்றிற்கென்று சில வரம்புகள் உள்ளன. அவற்றில் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. பண்பு விவரங்களை அறிவதற்கு புள்ளியியல் பொருந்தாது. புள்ளியியல் எண்ணிக்கையில் தெரிவிக்கக் கூடிய அளவின் விவரங்களை மட்டுமே ஆய்வு செய்கிறது. எண்ணிக்கையில் தெரிவிக்க முடியாத பண்பு விவரங்களை அழகு, அறிவு, நேர்மை, கடின உழைப்பு, உடல் நலம், துன்பம் போன்றவற்றில் நேரடியாக புள்ளியியல் பகுப்பாய்வைப் பயன்படுத்த முடியாது. ஆனால் இவற்றிற்குச் சமமான எண்களைக் கொடுப்பதன் மூலம் புள்ளியியல் முறைகளைக் கொண்டு இவைகளையும் ஆய்வு செய்யலாம். எடுத்துக்காட்டாக மாணவர்கள் தேர்வில் மதிப்பெண்கள் அடிப்படையில் அவர்களின் அறிவுக் கூர்மையைப் பற்றி அறியலாம்.

2. புள்ளியியல் தனி மதிப்பை ஆய்வு செய்வது இல்லை. புள்ளியியல் அநேக புள்ளி விவரங்களடங்கிய தொகுதியை மட்டும் ஆய்வு செய்யுமே ஒழிய தனிப்பட்ட ஓர் உறுப்பைப் பற்றி ஆய்வு செய்வதில்லை. தனியாக உள்ள ஓர் உறுப்பின் விவரம் புள்ளியியல் ஆகாது. அது புள்ளியியல் ஆய்விற்குப் பயன்படாது.

3. புள்ளியியல் விதிகள் மிகச் சரியானவை என்று கூற முடியாது. கணிதம், இயற்பியல், அறிவியலில் மிகச் சரியான விதிகள் உள்ளன என்பது நாம் அறிந்ததே. ஆனால் புள்ளியியல் விதிகள் மிகச் சரியானவை அல்ல. தோராயமானதே. புள்ளியியல் முடிவுகள் உலகம் முழுவதிலும் உண்மையாக இருப்பதில்லை. சராசரி அளவில் மட்டுமே உண்மையாக உள்ளது. .

4. புள்ளியியல் அட்டவணைகள் தவறாகப் பயன்படுத்தப்படலாம். புள்ளியியலை மிகத் திறமை வாய்ந்தவர்களால் மட்டுமே பயன்படுத்த முடியும். இல்லையெனில் புள்ளியியலில் செயல்முறைகள், சரியாகப் பயன்படுத்தத் தெரியாதவரிடம் கிடைத்த மிக மோசமான கருவியாகிவிட வாய்ப்பு உண்டு. புள்ளியியல் கருவிகளைச் சரியாகப் பயன்படுத்தத் தெரியாததாலும், அல்லது உரிய நபர் வேண்டுமென்றே தவறாகப் பயன்படுத்துவதாலும் தவறான முடிவுக்கு வர நேரிடும். தவறான எண் விவரங்களால், புள்ளியியல் முறைகேடாகப் பயன்படுத்தக் கூடும். கிங் என்பவரின் சரியான கூற்றுப்படி 'புள்ளியியல் என்பது ஒரு களிமண், ஒருவர் அதில் இருந்து அவரவர் விருப்பத்திற்கேற்ற வண்ணம் கடவுளையோ, பூதத்தையோ வடிவமாக்க இயலும்'.

5. பிரச்சினையைக் காணும் ஆய்வக் கருவிகளில் புள்ளியியலும் ஒரு ஆய்வுக்கருவியே புள்ளியியல் முறைகள் மட்டுமே ஒரு பிரச்சினையின் முழுத்தீர்வையும் தர இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, சமூக அமைப்பைப் பற்றி ஆய்வு செய்யும் போது, புள்ளியியல் விவரங்களை மட்டும் சார்ந்திராமல், அந்நாட்டின் பண்பாடு, மதம், தத்துவம் இவற்றையும் சேர்த்தே முடிவெடுக்க வேண்டும். எனவே புள்ளியியல் ஆய்வுகள் மற்ற சான்றுகளோடு இணைத்து முடிவுகளைத் தர வேண்டும்.

வினாக்கள்

1. புள்ளியியலின் தோற்றமும் வளர்ச்சியும் பற்றி விவரிக்கவும்
2. புள்ளியியலின் உபயோகம் பற்றி எழுதுக
3. புள்ளியியலின் சராசரி வார்த்தையைப் பற்றி நீவிர் அறிவது யாது? புள்ளியியல் பணிகளுக்கு அதன் முக்கியத்துவத்தை விளக்குக
4. புள்ளியியலின் வரம்புகள் பற்றி எழுதுக
5. வணிகவியல் துறையில் புள்ளியியலின் பயன்பாடு பற்றி கட்டுரை வரைக

புள்ளி விவரம் சேகரித்தல், வகைப்படுத்துதல் மற்றும் அட்டவணைப்படுத்துதல்

அறிமுகம்

தினசரி வாழ்க்கையில் அனைவரும் விவரங்களை சேகரித்து, பகுத்தாராய்ந்து மற்றும் பயன்படுத்தி வருகின்றனர். மக்கள் அதிக அளவில் விவரங்களை தினசரி உரையாடல்கள், தொலைக்காட்சிகள், வானொலி, கணினி, சுவரொட்டிகள் மூலம் தெரிந்து கொள்வதையே வழக்கமாகக் கொண்டிருக்கின்றனர். இவை எதனால் என்றால் மக்களுக்கு நிறைய விவரங்களை உற்று நோக்கி, தேர்ந்தெடுப்பதையோ, மறுப்பதையோ செய்ய வேண்டிய தேவை ஏற்படுகிறது. தினசரி வாழ்க்கையில் தொழில் மற்றும் தொழிற்சாலை ஆகியவற்றிற்கு சில புள்ளியியல் விவரங்கள் தேவைப்படுகின்றன. மற்றும் அவற்றை எங்கேயிருந்து எப்படி சேகரிப்பது என்பதும் தெரிய வேண்டியிருக்கிறது. இதன் விளைவாக ஒவ்வொருவரும் ஒரு பொருளை வாங்குவதற்கு முன்பு அதன் தரத்தையும், விலையையும் ஒப்பிட்டு பார்த்து ஒரு முடிவுக்கு வர வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு நிறுவனத்தில் பணிபுரிய தொழிலாளர்கள் தங்கள் ஊதியம், விதிமுறைகள், பதவி உயர்வு வாய்ப்புகள் மற்றும் பல விவரங்களை ஒப்பிட விரும்புவார்கள், அதே சமயம் நிறுவன முதலீட்டாளர்களும் அவர்களின் செலவினங்களை குறைத்து லாபத்தை அதிகப்படுத்த விரும்புவர்.

புள்ளியியலில் மிக முக்கியமான பயன்களில் ஒன்று, முடிவுகளை உருவாக்க விவரங்களை அளிப்பதாகும். கடந்த காலத்தின் தோற்றத்தையும், நிகழ்காலத்தின் விளக்கத்தையும் மற்றும் எதிர்காலத்தைப் பற்றிய முன் மதிப்பீடுகளையும் புள்ளியியல் தருகிறது.

1. புள்ளியியல் விவரங்கள் சேகரிப்பதன் நோக்கம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.
2. முதல் நிலை புள்ளியியல் விவரங்களை சேகரிக்கும் முறையை பற்றி விளக்கம் அளிக்க.
3. நடத்தும் ஆய்வு எந்த நிலையில் உள்ளது என்பதை தீர்மானிக்க.
4. பகுப்பாய்வின் போது அதன் வழி முறைகளைப் பற்றி கண்டறிவதற்கும், கணிப்பதற்கும்.
5. மாதிரிக் கணிப்பை வரையறுக்கவும், விளக்கவும்.
6. மாதிரிக் கணிப்பின் அடிப்படையை பகுப்பாய்வு செய்ய.

புள்ளியியல் ஆய்வு என்பது மக்களின் பல்வேறு பிரிவுகளைப் பற்றிய விவரங்களை சுருக்கமாகவும் ஒழுங்கு முறையிலும் அளிப்பதாகும். விவரத்தை விளக்குவதற்கும் முறைப்படுத்துவதற்கும், ஆய்வு செய்வதற்கும் பலவகையான புள்ளியியல் முறைகள்

உதவுகின்றன. அவ்வாறு ஆய்வு செய்த முடிவுகளை முன் கூட்டியே அறிவதற்கும், தீர்மானிப்பதற்கும் இதைப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

முதலில் விவரத்தை எவ்வளவு நல்ல முறையில் சேகரிக்கப்பட்டது என்பதைப் பொருத்து இறுதி முடிவின் ஏற்புடைத் தன்மையையும், துல்லியமும் அமையும். விவரங்களின் தரமானது இருக்கும் சூழ்நிலையை பெரிதும் பாதிக்கிறது. எனவே அதை முறைப்படுத்துவதற்கு மிக அதிக முக்கியத்துவம் கொடுக்க வேண்டும்.

விவரங்களைச் சேகரிக்கும் போது அதன் துல்லியத் தன்மையை உறுதிபடுத்திக் கொள்ள போதிய எச்சரிக்கை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

விவரங்களின் பிரிவுகள்

புள்ளியியல் விவரமானது அவை பயன்படுத்தும் முறையின் அடிப்படையில் இரு பிரிவுகளாக வகைப்படுத்தப்படுகிறது. அவையாவன.

1. முதல் நிலை விவரங்கள்
2. இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்

முதல் நிலை விவரங்கள்

ஒரு குறிப்பிட்ட ஆய்வுக்காக விசாரணையின் மூலம் ஒரு ஆய்வாளர் தாமே நேரடியாக சேகரிக்கும் விவரம் முதல் நிலை விவரம் என்று அழைக்கப்படும். இவ்வகை விவரங்கள் உண்மையானவை. இவ்விவரங்களை களப்பணியாளர்கள் மூலமாகவோ, ஆய்வுத்துறை மூலமாகவோ, நிறுவனம் மூலமாகவோ சேகரிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு ஆய்வாளர் பள்ளிக் குழந்தைகளுக்கான மதிய உணவுத் திட்டம் எவ்வாறு நடைமுறைப் படுத்தப்படுகிறது என அறிய விரும்பினால் ஒரு களப்பணி ஆய்வினை மேற்கொள்ள வேண்டும். அப்போது பெற்றோர் மற்றும் குழந்தைகளிடம் தேவையான வினாக்களை எழுப்பி அவர்கள் கருத்தினை அறிந்து விவரங்களை சேகரிக்க வேண்டும். இவ்வாறு சேகரிக்கும் விவரங்கள் முதல் நிலை விவரங்கள் எனப்படும்.

முதல் நிலை விவரங்களை கீழ்கண்ட ஐந்து முறைகளில் பிரிக்கலாம்

1. நேரிடையாக விவரங்களைச் சேகரித்தல் (Direct Personal Interview)
2. மறைமுக வாய்மொழி முறை மூலம் சேகரித்தல் (Indirect Oral Interview)
3. செய்தியாளர்கள் மூலம் விவரங்கள் சேகரித்தல் (Information from respondents)
4. தபால் வாயிலாக வினாப்பட்டியல் அனுப்பி சேகரிக்கும் முறை (Mailed Questionnaire Method)

5. கணிப்பாளர்கள் மூலம் பட்டியலை அனுப்பி விவரங்கள் சேகரித்தல் (Schedules sent through enumerators)

1. நேரிடையாக விவரங்களை சேகரித்தல்

இம்முறையில் யாரிடம் விவரங்களை பெற வேண்டுமோ அவர்களே விவரங்களைச் சொல்பவர் ஆவர். ஆய்வாளர் நேரிடையாக அவர்களிடம் சென்று வினாக்களை எழுப்பி விவரங்களைப் பெறுகின்றனர். ஆய்வை மேற்கொள்ளும் பகுதி அதிக அளவில் இல்லாமல் குறைந்த நிலையில் உள்ளபோது இம்முறையே உகந்த முறையாக உள்ளது.

நிறைகள்

1. விவரங்கள் சேகரிப்பவர்கள் நேரிடையாக விவரம் கொடுப்பவர்களை அணுகி விவரங்கள் பெறுவதால் விவரங்களை வேறு முறைகளை விட இம்முறையின் மூலம் அதிகமானவர்களிடம் விவரம் பெற முடிகிறது. கொடுப்பவர்களின் விருப்பத்துடன் செய்திகளை பெறும் நிலை உள்ளது.

2. கிடைக்கப் பெற்ற விவரங்கள் சீரானதாகவும் துல்லியமானதாகவும் அமைகிறது. விவரங்கள் கொடுப்பவர்களின் சந்தேகங்களை ஆய்வாளர் நிவர்த்தி செய்கிறார்.

3. விவரங் கொடுப்பவர்களின் தொடர்பான விவரங்களைப் பெற முடிகிறது. நடத்தை மற்றும் பொதுவான செய்திகளையும் பெற்று ஆய்வின் முடிவுகளுக்கு பயன்படுத்த ஏதுவாகிறது.

4. வினாக்களில் உள்ள வார்த்தைகளை சூழ்நிலைக்கு ஏற்ற வகையில் மாற்றியமைத்துக் கேட்க முடிகிறது. மாற்று மொழிகளில் வினாக்களை கொடுக்க முடிகிறது விவரங்கள் கொடுப்பவருக்கு ஏற்படும் தொந்தரவுகள், புரிந்து கொள்ளும் தன்மை ஆகியவற்றை தீர்க்க முடிகிறது.

குறைகள்

1. நேரிடையாக விவரங்களை சேகரிக்கும் முறை அதிக செலவையும் அதிக நேரத்தையும் உட்கொள்கிறது.

2. விவரங்கள் கொடுப்பவர்களின் எண்ணிக்கை மிகக் கூடுதலாகவும், வசிக்கும் இடம் விரிவான நிலையில் இருக்கும் போது இம்முறை மிகவும் சிரமமாக அமையும்.

3. இம்முறையில் தனிநபர் விருப்பு வெறுப்பு அதிகளவில் இருக்கும்.

2. மறைமுக வாய்மொழி முறை

விவரங்களைக் கொடுப்பவர்களை நேரிடையாக அணுகாமல் அவர்கள் வீட்டிற்கு அருகில் வசிப்பவர்கள் அல்லது அவர்களின் நண்பர்கள் அல்லது மற்றவர்களிடம் இருந்து விவரங்கள் பெறுவதை இம்முறை குறிக்கும். இம்முறையில் திருட்டு அல்லது கொலை பற்றிய விவரங்களை சேகரிக்க முடிகிறது. விவரங்கள் கொடுப்பவரின் வீடு தீயினால்

பாதிக்கப்படும் பொழுது அவர்களது நண்பர்கள் அல்லது அவர்களின் வீட்டிற்கு அருகே வசிப்பவர்கள் அல்லது அவரைச் சார்ந்தவர்கள் மூலம் தீயின் காரணம் பற்றிய விவரங்களை சேகரிக்கின்றனர்.

சில வழக்குகளில் காவல் துறையினர் திருட்டு, கொலை சம்மந்தப்பட்ட விசாரணைக்கு மூன்றாம் நிலையில் உள்ளவர்களிடம் சில விளக்கங்கள் பெறுகின்றனர். அரசால் நியமிக்கப்படும் விசாரணைக் குழு இம்முறையைக் கையாண்டு விசாரணை சம்மந்தப்பட்டவற்றைப் பற்றி மக்களின் எண்ணங்களையும், ஏனைய அனைத்து செய்திகளையும் சேகரிக்கின்றனர்.

நேரடி விசாரணை முறை செயல்பட முடியாத சூழ்நிலையிலும் விவரங்கள் கொடுப்பவர் கொடுக்க மறுக்கும் சூழ்நிலையிலும், மறைமுக வாய்மொழி முறையே உகந்ததாக அமைகிறது. விவரம் கொடுப்பவர்களின் விவரங்கள் எந்த சூழ்நிலையில் பதிவு செய்யப்படுகிறது என்பதை பொருத்தும் விவரங்கள் சேகரிப்பவரின் திறமையைப் பொருத்தும் விவரங்களின் தன்மை அமையும்.

மூன்றாம் இனத்தார்கள் என்பவர்கள் தகுதியான வினாகட்கு விவரங்கள் அளிப்பவராகவும் குறுக்கு விசாரணைக்கட்கு நல்ல முறையில் விவரங்கள் அளிப்பவர்களாகவும் இருப்பார்கள் என்பது பொருளாகும். விவரங்கள் சேகரிப்பவர் விவரங்கள் கொடுப்பவர்களிடம் கேட்கும் வினாக்களை குழப்பமான நிலையில் கேட்கக் கூடாது. விவரங்கள் கொடுக்கும் ஒருவர் அல்லது ஒரு குழுவினர் நம்பத்தகுந்தவர்களாக இருக்கும் சூழ்நிலையிலேயே இம்முறையின் முடிவுகள் சிறப்புடையதாக இருக்கும்.

3. செய்தியாளர்கள் மூலம் விவரங்கள் சேகரித்தல்

ஆய்வாளர்கள் தமக்கு சில உதவியாளர்களை நியமித்து, அவர்கள் மூலம் சேகரித்த செய்திகளை பெறுதல் ஆகும். செய்தித்தாள்கள் மூலம் கிடைக்கும் செய்திகள் மற்றும் சில அரசுத் துறை நிறுவனங்கள் மூலமாக கிடைக்கும் செய்திகள் இம்முறையில் அடங்கும். மிக எளிமையாகவும் விரிந்த ஆய்விற்கு உகந்ததாகவும் இம்முறை அமைகிறது. ஆனால் இம்முறையில் கிடைக்கும் முடிவுகள் துல்லியமானவை என்று கூற இயலாது. நீண்ட காலத்தில் விரிந்த பரப்பில் தொடர்ந்து விவரங்கள் சேகரிக்க வேண்டிய சூழ்நிலையில் இம்முறை உகந்ததாக அமைகிறது.

4. அஞ்சல் வழியாக வினாப்பட்டியல் அனுப்பி விவரங்கள் சேகரிக்கும் முறை

இம்முறையில் பல வினாக்களைத் தொகுத்து அவற்றை அஞ்சல் வழியாக விவரங்கள் தருபவர்களுக்கு அனுப்பப்படுகிறது. தொழில் நுணுக்கத்தின் அடிப்படையில் இவ்வினாக்கள் அடங்கிய தொகுதியை வினாப்பட்டியல் என்று கூறுகிறோம். வினாப்பட்டியலைப் பார்த்து விவரங்கள் தருபவர்களுக்கு ஒரு கடிதத்தினை இவ்வினாப் பட்டியலோடு இணைத்து அனுப்புதல் வேண்டும். இக்கடிதத்தில் ஆய்வின் நோக்கத்தையும், காலியிடத்தில் பூர்த்தி செய்வதற்கான முக்கியத்துவத்தையும், குறித்த காலத்திற்குள் பூர்த்தி செய்யப்பட்ட வினாப்பட்டியலை திருப்பி அனுப்புவதற்கான வேண்டுகோள்களையும் குறிப்பிட்டிருத்தல்

வேண்டும். விவரங்கள் கொடுப்பவர்கள் படித்தவர்களாகவும் பரந்த பரப்பில் வசிப்பவர்களாகவும் இருக்கும் சூழ்நிலையில் இம்முறை உகந்ததாக அமைகிறது.

நிறைகள்

1. அஞ்சல் வழியாக வினாப்பட்டியல் அனுப்பி விவரங்கள் சேகரிக்கும் முறையில் செலவு குறைவு.
2. இம்முறையில் விரைவில் விவரங்களைப் பெறுதல் எளிது.
3. விவரங்கள் கொடுப்பவர்கள் பரந்த பரப்பில் வசிக்கும் போது இம்முறை உகந்ததாக உள்ளது.

குறைகள்

1. வினாப்பட்டியலில் உள்ள விவரங்களைப் புரிந்து கொண்டு பதிலளிப்பவர் கல்வி அறிவு உடையவராக இருத்தல் வேண்டும்.
2. சிலர் வினாப்பட்டியலைப் பெற்று திரும்ப அனுப்பாமல் இருக்கலாம்.
3. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் அனைத்தும் சரியானவையா என்று அறிவது கடினம்.

5. கணிப்பாளர் மூலம் விவரங்களை சேகரித்தல்

கணிப்பாளர்கள், விவரங்கள் தருபவரை அணுகி விவரங்களைப் பெற்று வினாத் தொகுதியை பூர்த்தி செய்வதை குறிக்கும். விரிவான ஆய்விற்கு உகந்ததாக இம்முறை அமைகிறது.

நிறைகள்

1. கணிப்பாளர் மூலம் விவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறையை விவரங்கள் கொடுப்பவர்கள் கல்லாதவராயினும் பின்பற்றலாம்.
2. தனிநபரின் இரகசியத்தைப் பற்றியும் மற்றும் பொருள் விவரம் பற்றியும் உள்ள வினாக்களுக்கு பதிலைப் பெறலாம்.
3. விவரங்கள் தருபவர்களை நேரிடையாக அணுகுவதால் இணக்கமின்மை என்பது கிடையாது.
4. இம்முறையில் சேகரித்த விவரங்கள் நம்பத்தகுந்தவை. இதற்கேற்ப கணிப்பாளர்களுக்கு நல்ல பயிற்சி அளிக்கலாம்.
5. இம்முறை பலராலும் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டது.

குறைகள்

1. கணிப்பாளர் மூலம் விவரங்களைச் சேகரித்தலுக்கு கூடுதலாக செலவாகும்.
2. சரியான மற்றும் முறையான விவரங்களைப் பெறுவதற்கு கணிப்பாளர்களுக்கு நல்ல பயிற்சி கொடுக்க வேண்டியுள்ளது.
3. நேர்காணலுக்கு நல்ல முன் அனுபவம் தேவையாகிறது.

வினாப்பட்டியல் (Questionnaire) மற்றும் வினாத் தொகுதி (Schedule) தயாரிப்பு

வினாப்பட்டியலிலிருந்து வினாத் தொகுதி வேறுபடுகிறது. வினாப்பட்டியல் என்பது விவரங்களைக் கொடுப்பவர்களே நேரிடையாக பட்டியலில் குறிப்பதைக் குறிக்கும். வினாத்தொகுதி என்பது கணிப்பாளர்கள் விவரங்கள் தருபவர்களை நேரிடையாக அணுகி விவரங்கள் பெறுவதைக் குறிக்கும். சிலர் இவ்விரண்டையும் வேற்றுமைப்படுத்துவதில்லை. உண்மையான ஆய்விற்கு முன்பாக மாதிரி ஆய்வினை (Pilot Survey) நடத்துதல் வேண்டும்.

வினாப்பட்டியல் அல்லது வினாத்தொகுதியை மாதிரி ஆய்வினைப் பயன்படுத்தி சரி செய்தல் வேண்டும். யாரிடமிருந்து விவரங்கள் தேவைப்படுகிறதோ அவர்களை அழைத்து விவரங்களைப் பெறுதல் வேண்டும். அவர் வினாக்களை தவறாகவோ, புரிந்து கொள்ளாமலோ அல்லது வார்த்தை வடிவில் கூற இயலாமலோ இருக்கும் நிலையில் வினாக்களை மாற்றியமைக்க வேண்டும். அனைத்து வினாக்களுக்கும் தேவையான பதில்கள் கிடைக்கப் பெற்றுவிட்டனவா என்பதையும் முடிவு செய்து கொள்ளுதல் வேண்டும்.

சிறந்த வினாப்பட்டியலின் பொதுப்பண்புகள் ஆவன.

1. வினாக்களின் எண்ணிக்கை குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.
2. எளிமையான வினாக்களிலிருந்து கடினமான வினாக்களுக்குச் செல்லும் வண்ணமாக அமைதல் வேண்டும்.
3. வினாக்கள் சுருக்கமாகவும் எளிமையாகவும் இருத்தல் வேண்டும். புரியாத வார்த்தைகளைத் தவிர்த்தல் நன்று.
4. வினாக்கள் ஆம், இல்லை என்ற பதிலை பெறுமாறு சுருக்கமாக அமைதல் நன்று.
5. தனிமனிதனின் இரகசியத்தை வெளிப்படுத்துமாறும், யோசித்து பதில் கூறுமாறும், கணக்கிட்டு பதில் கூறுமாறும் உள்ள வினாக்களை தவிர்த்தல் நன்று.
6. வினாக்களை முழுமையாக சோதனைக்குட்படுத்த வேண்டும். வெளிப்படையான அல்லது நமது செயல்களுக்கு உட்படாத தவறுகளை முடிந்த அளவுக்கு ஒதுக்குதல் நன்று.
7. ஆய்வின் நோக்கத்தை முழுமையாக பூர்த்தி செய்யும் நிலைக்கு ஏற்ற வகையில் வினாப்பட்டியலை அமைத்தல் வேண்டும்.

8. வினாக்களின் வார்த்தைகள் ஒருவருடைய மனதைப் புண்படுத்தக் கூடாது.

9. ஒருவரின் இரகசியத்தை வெளிப்படுத்துமாறு உள்ள வினாக்களைத் தவிர்த்தல் வேண்டும்.

10. வினாக்களுக்கு பதில் எழுத போதுமான அளவுக்கு இடம் ஒதுக்குதல் வேண்டும்.

11. நேரடியாக நல்ல பதில்களை தருபவர்களைத் தடுக்கும் வண்ணம் வினாக்கள் அமைதல் கூடாது.

12. வினாப்பட்டியலின் தோற்றம் நல்ல முறையில் இருத்தல் வேண்டும்.

முதல் நிலை விவரங்களின் நிறை குறைகள்

1. ஆய்வாளரால் ஆய்வு மேற்கொள்ளப்படும் இடப்பரப்பு சிறியதாக இருக்கும் போது மட்டுமே இம்முறையில் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிக்க முடியும். பிரதிநிதிகளை அனுப்பி விவரங்களைச் சேகரிப்பதற்கு செலவு அதிகரிக்கும். மேலும் தகவல் தருவோர் அளித்த விவரங்கள் சரியாக பிரதிநிதிகளால் பதிவு செய்யப்பட்டுள்ளனவா என்பதில் ஒரு முறைக்கு இரு முறையாக கவனம் செலுத்துதல் வேண்டும்.
2. வினாத் தொகுதி மூலம் முதல் நிலை விவரங்கள் சேகரிக்கப்பட்டாலோ அல்லது தபால் மூலம் வினாப்பட்டியலை அனுப்பி விவரங்களை சேகரித்தாலோ, குறைவான செலவிலோ குறைவான நேரத்திலோ முடிக்க இயலும்.
3. கேள்விகள் தர்ம சங்கடமாகவோ, மிகச் சிக்கலாகவோ ஒருவரின் இரகசியத்தை வெளிப்படுத்துவதாகவோ அமையுமானால் அவ்வினாத் தொகுதியில் உள்ள விவரங்கள் துல்லிமாகவும் சரியாகவும் நிரப்பப்பட்டிருக்காது எனவே இம்முறை பொருத்தமற்றது.
4. இரண்டாம் நிலை விவரங்களை விட முதல் நிலை விவரங்கள் மூலம் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் மிகுந்த நம்பகத் தன்மையுடையன.

இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்

பலவித நோக்கங்களுக்காக முன்பே சேகரிக்கப்பட்டு வெளியிடப்பட்ட புள்ளி விவரங்களிலிருந்து தற்போதைய விசாரணைக்காக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் எனப்படும். W. A. நெய்ஸ்வாங்கர் கூற்றுப்படி “விவரத்தை நேரடியாகச் சென்று சேகரித்து பகுத்தாய்வு செய்யும் பொறுப்பேற்றுக் கொண்டவரால் வெளியிடப்பட்ட விவரங்களின் பதிப்பு முதல் நிலை ஆதாரமாக இருக்கும். அவ்விவரங்களைப் பற்றிய குறிப்புகளை ஆய்வு செய்வதற்காக பொறுப்பேற்றுக் கொண்டவரால் சேகரிக்கப்பட்டு வெளியிடப்பட்டவையே இரண்டாம் நிலை ஆதாரமாகும்.”

இரண்டாம் நிலை விவரங்களின் ஆதாரம்

எல்லா ஆய்வுகளுக்கும் ஆய்வாளரே நேரடியாகச் சென்று முதன் முறையாக விவரங்களைச் சேகரிப்பது நடைமுறையில் சாத்தியமில்லை. அந்நிலையில் மற்றவர்களால்

சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை பயன்படுத்துகிறார். புள்ளியியல் ஆய்வுகள் மேற்கொள்வதற்காக மிக அதிக அளவில் தகவல்கள் வெளியிடப்படுகின்றன. அதிலிருந்து புதிது புதிதாக புள்ளி விவரங்கள் வெளியிடப்படுகின்றன. இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட தலைப்புகளில் இருவகைத் தலைப்பில் வெளியிடப்படுகின்றன.

1. வெளியிடப்பட்ட ஆதாரங்கள்
2. வெளியிடப்படாத ஆதாரங்கள்

1. வெளியிடப்பட்ட ஆதாரங்கள்

வெளியிடப்பட்ட பல்வேறு வகையிலான ஆதாரங்கள் பின்வருமாறு

1. பன்னாட்டு அளவில் வரும் அதிகார பூர்வ வெளியீடுகளும், அறிக்கைகளும்
    i. உலக நிறுவனங்களான பன்னாட்டு நிதியம் ஐக்கிய நாடுகள் அவை, பன்னாட்டு நிதிக் கழகம் போன்றவையும்
    ii. மத்திய மற்றும் மாநில அரசுகளின் அறிக்கைகள், டாண்டன் குழு அறிக்கை ஊதியக் குழு அறிக்கைகள் போன்றவை.
2. அரசு கலப்புடைய நிறுவனங்களின் வெளியீடுகள் நகராட்சிகள், மாநகராட்சிகள், ஊராட்சி அளவில் வெளியிடப்படும் அறிக்கைகள்.
3. தனியார் வெளியீடுகள்
    i. வணிக மற்றும் தொழில் துறை சார்ந்த வெளியீடுகள் இந்திய வணிகக் கழகம், இந்தியவணிகக் கணக்காளர் நிறுவம் போன்றவற்றின் அறிக்கைகள்.
    ii. நிதி மற்றும் பொருளியல் சார்ந்த இதழ்கள்
    iii. நிறுவனங்களின் ஆண்டறிக்கைகள்
    iv. ஆய்வு நிறுவனங்கள் மற்றும் ஆய்வு மேற்கொள்ளும் மாணவரின் வெளியீடுகள் போன்றவை.

குறிப்பாக, மேற்குறிப்பிட்ட வெளியீடுகள் குறிப்பிட்ட இடைவெளி மாறக் கூடியவை என்பதைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். சில வெளியீடுகள் சமமான கால இடைவெளிகளில் (ஆண்டு, மாதம், வாரம், தினசரி) வெளியிடப்படுகின்றன. ஆனால் சில வெளியீடுகள் தற்காலிகமானவை.

குறிப்பு இரண்டாம் நிலை விவரங்கள், இணைய தளத்தில் ஏராளமாகக் கிடைக்கின்றன. அவற்றை எந்த நேரத்திலும், மேல் ஆய்வுகளுக்கும் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

2. வெளியிடப்படாத ஆதாரங்கள்

எப்போதும் எல்லா புள்ளியியல் விவரங்களும் வெளியிடப்படுவதில்லை. அரசு மற்றும் தனியார் அலுவலகங்களால் பதிவுசெய்யப்பட்ட விவரங்கள், கல்வி நிறுவனங்களால் மேற்கொள்ளப்பட்ட ஆய்வு முடிவுகள் போன்றவையே பல்வேறு வெளியிடப்படாத விவரங்களாகும்.

இவ்வகை விவரங்கள் எங்கெங்கு தேவையோ அங்கு பயன்படுத்தலாம். இரண்டாம் நிலை விவரங்களைக் கையாளுவதில் தேவையான முன்னெச்சரிக்கை. இரண்டாம் நிலை விவரங்களைக் கையாளுவதற்கு முன் பின்வருவனவற்றைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

1. விவரங்கள் சேகரிப்பதற்குக் கையாளப்பட்ட வழிமுறைகள்.
2. விவரங்கள் துல்லியத்தன்மை
3. எந்த அளவிற்கு விவரங்கள் தொகுக்கப்பட்டன.
4. முன்னர் சேகரித்த விவரங்களோடுள்ள ஒப்புதல் அல்லது ஒப்பீடு.
5. விவரங்களைச் சேகரித்த நிறுவனம் பற்றியும், விவரங்கள் சேகரித்த நோக்கம் பற்றியும் அறிய வேண்டும்.

பொதுவாக கூறுமிடத்து இரண்டாம் நிலை விவரங்களைப் பொருத்த அளவில் மக்களுக்கு எது தேவையோ, எதைக் காண முடிகிறதோ அவற்றுக்கு மத்தியில் நின்று திருப்திப்பட்டுக் கொள்ள வேண்டும்.

இரண்டாம் நிலை விவரங்களின் நிறை குறைகள்

1. மிகக் குறைந்த செலவில் இரண்டாம் நிலை விவரங்களை சேகரிக்க இயலும். அரசு வெளியீடுகளும் மிகக் குறைந்த செலவில் கிடைக்கின்றன. அரசு மற்றும் தனியார் நிறுவனங்களால் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்கள் நூலகங்களில் கிடைக்கும்.
2. இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் இணைய தளத்தில் அதிக அளவில் கிடைக்கின்றன.
3. கிடைக்கும் நிறைய இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் பல வருடங்களாக சேகரிக்கப்பட்டவை. அவற்றைக் கொண்டு போக்குகளைக் (trend) குறிக்கலாம்.
4. இரண்டாம் நிலை விவரத்தின் மதிப்பு
    - அரசாங்கம் - முடிவுகள் எடுப்பதற்கும் எதிர்கால கொள்கை முடிவுகளுக்கும் பயன்படுகிறது.
    - வியாபாரம் மற்றும் தொழில் துறை - சந்தை மற்றும் விற்பனைப் பிரிவுகளில் உள்ள பொருளாதார மற்றும் சமூக நிலைமை மற்றும் போட்டியாளர்களைப் பற்றிய விவரங்களைக் கொடுக்கிறது.
    - ஆய்வு நிறுவனங்கள் - சமூக, பொருளாதார மற்றும் தொழில்துறை விவரங்களைக் கொடுக்கிறது.

வினாக்கள்

1. இரண்டாம் நிலை புள்ளி விவரம் பற்றி எழுதுக?
2. முதல்நிலை மற்றும் இரண்டாம் நிலை புள்ளி விபரங்களை சேகரிக்கும் முறைகளை பற்றி விவரிக்கவும்.
3. முதல்நிலைப் புள்ளி விபரம் பற்றி குறிப்பு வரைக
4. முதல்நிலை விவரங்களில் நிறை குறைகளைக் கூறுக.

அறிமுகம்

மாதிரிக் கணிப்பு (sampling) என்பது நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் அடிக்கடி பயன்படுத்தப்படுவதாகும். கடைக்குச் சென்று தானியவகைகளை நாம் வாங்கும்போது ஒரு கைப்பிடியளவே எடுத்து அதன் தரம் அறிந்து அப்பொருட்களை வாங்குகிறோம். ஒரு மருத்துவர் ரத்தத்தின் சில துளிகளை மாதிரியாக எடுத்து சோதித்தபின் நம் உடலில் ஏற்பட்ட நோயின் தன்மையைப் பற்றிய முடிவுக்கு வருகிறார். இவ்வாறாக நடைமுறையில் பெரும்பாலான ஆய்வுகள் மாதிரிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டே அமைகின்றன.

முழுமைத்தொகுதி (Population)

புள்ளியியல் சோதனையில் முழுமைத்தொகுதி என்பது ஓர் ஆய்வுக்கு உட்படுத்தப்படும் அனைத்து உறுப்புகளின் தொகுப்பினைக் கொண்டதாகும். ஒரு பள்ளி அல்லது கல்லூரியில் பயிலும் மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு நூலகத்திலுள்ள மொத்த நூல்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு கிராமம் அல்லது நகரத்தில் உள்ள மொத்த வீடுகளின் எண்ணிக்கை போன்றவை முழுமைத்தொகுதிக்கான எடுத்துக்காட்டுகளாகும். சில சமயங்களில் முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளைப் பற்றிய விவரங்களையும் சேகரித்துக் கொண்டு, நடைமுறைக்கேற்ப ஆய்வு செய்ய முடிகிறது. இதை முழுக் கணிப்புமுறை (Complete enumeration or census) என்று அழைக்கிறோம். அவ்வாறு முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அளந்து, எல்லா உறுப்புகளையும் எடுத்துக் கொள்ள இயலாத சமயங்களில் மாதிரிக்கணிப்பு முறையைக் கையாள்கிறோம்.

முடிவுறு முழுமைத் தொகுதி, முடிவுறா முழுமைத் தொகுதி

முடிவுறு முழுமைத்தொகுதி (Finite population) எனில் அதிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, முடிவுறு எண்ணிக்கையைக் கொண்டதாக இருக்க வேண்டும். ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு தொழிலகத்தில் ஒரு நாளில் உற்பத்தியாகும் பொருட்களின் எண்ணிக்கை போன்றவை முடிவுறு முழுமைத் தொகுதிக்கு உரிய சில எடுத்துக் காட்டுகளாகும். முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முழுமைத்தொகுதி அளவு (population size) என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு முழுமைத் தொகுதி எண்ணற்ற உறுப்புகளைக் கொண்டதாக இருந்தால் அது வரம்பற்ற முழுமைத்தொகுதி அல்லது முடிவுறா முழுமைத்தொகுதி (Infinite population) என்று அழைக்கப்படுகிறது. வானத்தில் உள்ள விண்மீன்களின் எண்ணிக்கை, தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காண்போரின் எண்ணிக்கை போன்றவை முடிவுறா முழுமைத்தொகுதிக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

முழுக் கணிப்பு முறை (Census method)

முழுமைத்தொகுதியைப் பற்றிய விவரங்கள் இரு வழிகளில் சேகரிக்கப்படுகின்றன. அவை முழுக்கணிப்பு முறை மற்றும் மாதிரிக் கணிப்புமுறை ஆகும். முழுக்கணிப்பு முறையில், முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் ஆய்வுக்கு உட்படுத்தப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கிராமம் அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதியில் உள்ள குடும்பங்களில் சராசரி ஆண்டு வருமானத்தைக் கணக்கிட வேண்டுமென்றால், அப்பகுதியில் 1000 குடும்பங்கள்இருக்குமாயின், ஆயிரம் குடும்பங்களின் வருமானத்தையும் கணக்கிட வேண்டும். இம்முறையில் ஒவ்வோர் குடும்பமும் முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்பாதலால் ஒன்றையும் விட்டுவிடக் கூடாது. இருக்குமாயின், ஆயிரம் குடும்பங்களின் வருமானத்தையும் கணக்கிட வேண்டும். இம்முறையில் ஒவ்வோர் குடும்பமும் முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்பாதலால் ஒன்றையும் விட்டுவிடக் கூடாது.

முழுக்கணிப்பு முறையின் நிறைகளும் குறைகளும்

நிறைகள்

1. முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிலிருந்தும் விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன.
2. இம்முறையில் பெறப்படும் முடிவுகள் துல்லியமாகவும் நம்பிக்கைக்கு உரியதாகவும் இருக்கும்.
3. ஆழ்ந்த ஆய்வினை மேற்கொள்ள வேண்டும்.
4. இம்முறையில் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களை பல்வேறு கள ஆய்வுகளுக்கும், பகுப்பாய்வுகளுக்கும் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

குறைகள்

1. இம்முறைக்கு அதிக கணிப்பாளர்களின் உழைப்பு தேவைப்படுகிறது. அதனால் இது அதிக செலவு பிடிக்கும் முறையாகும்.
2. இம்முறைக்கு அதிக பணம், காலம், உழைப்பு, சக்தி தேவைப்படுகிறது.
3. முடிவுறா முழுமைத் தொகுதியாக இருப்பின், சில சமயங்களில் இம்முறை மூலம் விவரங்களைச் சேகரிக்க இயலாது.

மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Sampling)

மாதிரிக் கணிப்பு முறை என்பது சமீப காலத்தில் வளர்ச்சி பெற்றதாயினும் இது புதிய கருத்தன்று. முன்னுரையில் கூறியுள்ளபடி நம் அன்றாட வாழ்வில் நம்மை அறியாமலே மாதிரிக் கணிப்பு முறையைப் பயன்படுத்தி வருகிறோம். அவ்வெடுத்துக்காட்டுகள் அனைத்திலும் மாதிரிகளே முழுமைத்தொகுதிகளைப் பற்றிய சரியான கருத்தை உருவாக்குகின்றன என நம்புகிறோம். நமது பெரும்பாலான முடிவுகள், சில உறுப்புகளைச்

சோதனை செய்வதின் அடிப்படையிலேயே அமைகின்றன. அதனாலேயே மாதிரிக்கணிப்பு முறை பற்றிய விவரங்களை நாம் அறிந்து கொள்வதற்கான அவசியம் ஏற்படுகிறது.

மாதிரி (Sample)

புள்ளியியலாளர், முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து ஒரு பகுதியைத் தேர்வு செய்யும் முறைை மாதிரி எடுத்தல் அல்லது கூறு எடுத்தல் என்கின்றனர். முழுமைத்தொகுதியில், புள்ளியியல் கணிப்பிற்காக வரையறுக்கப்பட்ட உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முடிவுறு உட்கணம் மாதிரி என்று அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு மாதிரியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை மாதிரி அளவு (Sample size) என்கிறோம்.

மாதிரிக் கணிப்பு அலகு (Sampling Unit)

ஒரு முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் மாதிரி எடுக்கப்படும்போது அந்த உறுப்புகள் மேலும் பிரிக்கப்படாமல் இருப்பின் அவை மாதிரிக்கணிப்பு அலகுகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒவ்வொரு குடும்பத்தின் சராசரி வருவாயைக் காண வேண்டுமெனில், குடும்பத்தலைமையே மாதிரிக் கணிப்பு அலகாகக் கருதப்படும். சராசரி நெல்விளைச்சல் பற்றிக் கருதும்போது, ஒவ்வோர் உரிமையாளர் பெறும் நெல் விளைச்சலே மாதிரிக் கணிப்பு அலகு ஆகிறது.

மாதிரிக் கணிப்புப் பட்டியல் (Sampling frame)

மாதிரிக் கணிப்பு முறையை செயல்படுத்தும்போது, ஒவ்வொரு மாதிரிக் கணிப்பு அலகிற்கும் அதை அடையாளம் காண ஓர் எண் தருவது அவசியமாகிறது. அவ்வாறு பெறப்பட்ட பட்டியல், மாதிரிக் கணிப்புப் பட்டியல் என்று அழைக்கப்படுகிறது. வாக்களிப்போர் பட்டியல், வீடு வைத்திருப்போர் பட்டியல் ஊரிலுள்ள விவசாயிகளின் பட்டியல் போன்றவை மாதிரிக் கணிப்புப் பட்டியலுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

மாதிரி எடுப்பதற்கான காரணங்கள்

பின்வரும் சூழ்நிலைகளில் மாதிரிக் கணிப்பு தவிர்க்க முடியாததாகும்.

1. முழுமைத்தொகுதி முடிவுறாததாக இருக்கும் போது முழுக்கணிப்பு முறை நடைமுறையில் சாத்தியமாகாது.
2. குறுகிய கால இடைவெளியில் விவரங்கள் தேவைப்படும் போது
3. ஆய்வுக்களம் பரந்து விரிந்து மிகப்பெரிதாக இருக்கும்போது
4. பணம், பயிற்சி பெற்ற கணிப்பாளர்கள் போன்ற ஆதாரங்கள் ஒரு குறிப்பிட்ட வரம்புக்குஉட்பட்டிருப்பின்
5. ஆய்வின் போது, தேர்ந்தெடுக்கும் பொருள் அழிந்து விடக்கூடியது எனில் மாதிரிக் கணிப்பே உகந்ததாகும்.

மாதிரிக் கணிப்பின் கோட்பாடுகள்

மாதிரிகள் நன்கு கணிக்கும் திறன் கொண்டவையாக இருக்க வேண்டும். அதற்கு மாதிரிகள் கீழ்க்கண்ட கோட்பாடுகளுக்கு உட்பட்டிருக்க வேண்டும்.

1. புள்ளியியலின் ஒழுங்கு நியதி (Statistical regularity)

ஒரு பெரிய தொகுதியினின்று, சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிப்பதற்கு ஏற்ப, மாதிரிகளில் உள்ள ஒரு நிகழ்வின் சராசரியும், தொகுதியின் சராசரியும் அதே பண்புகளைப் பெற்றிருப்பதற்கான வாய்ப்புகள் நிச்சயமாகிறது. அதாவது, ஒரு நிகழ்விற்கான சோதனை செய்யும் போது, மாதிரிகளில் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிப்பதற்கு ஏற்ப அச்சோதனையின் முடிவுகளில் ஓர் ஒழுங்கு முறை அல்லது நிலைத் தன்மை ஏற்படுகிறது. ஆதனால் அம்மாதிரிகளின் சராசரிகள் பெருந்தொகுதியின் பண்புகளைப் பெற்றிருக்கக் காரணமாகிறது.

2. பேரினங்களில் மாறாப் பொதுமை (Inertia of large numbers)

மாதிரியின் அளவை அதிகரிப்பதால் மாதிரிக்குள்ளேயுள்ள வேறுபட்ட பண்புகளும் சமப்படுத்தப்பட்டு முடிவில் மாறாப் பொதுமையைப் பெறுகிறது. எனவே கிடைக்கவிருக்கும் சராசரி முடிவுகள் மிகவும் துல்லியமாகவும் நம்பிக்கைக்கு உகந்ததாகவும் இருக்கும்.

3. ஏற்புடைத் தன்மையுடைமை (Validity)

மாதிரிக் கணிப்பு முறைகள், தொகுதிப் பண்பளவைகளை ஏற்புடைய அளவிற்கு உகந்ததாகக் கணிக்கும் திறன் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

4. உத்தமத் தன்மையுடைமை (Optimisation)

உத்தம முடிவுகளைப் பெறும் வகையில் மாதிரிக் கணிப்பு முறைகளை, முன்பே நன்கு வடிவமைத்துத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும் என்று இக்கோட்பாடு கூறுகிறது. இதனால் மாதிரிக் கணிப்பை வடிவமைப்பதில் ஏற்படும் இழப்பு குறைகிறது. மாதிரிக் கணிப்பு முறையைப் பயன்படுத்துவதற்கான மிக முக்கிய காரணம், முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய அதிகபட்ச விவரங்களை மிகக் குறைந்த அளவிலான செலவு, நேரம் மற்றும் மனித உழைப்பு ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி சேகரிப்பதற்காகவே. எனவே மாதிரிகள், முழுமை தொகுதியின் எல்லாப் பண்புகளையும் பெற்றிருக்கும் போதுதான், இவை சிறந்த முறையில் நிறைவேற்றப்படும்.

மாதிரிக் கணிப்புப் பிழைகள் மற்றும் மாதிரிக் கணிப்பில் அல்லாத பிழைகள்

(Sampling errors and non-sampling errors)

மாதிரிக் கணிப்பு முறைகளை மேற்கொள்ளும் போது இருவகைப் பிழைகள் ஏற்பட வாய்ப்புண்டு. அவை மாதிரிக் கணிப்புப் பிழைகள், மாதிரிக் கணிப்பில் அல்லாத பிழைகள் எனப்படும்.

1. மாதிரிக் கணிப்புப் பிழைகள் (Sampling errors)

மாதிரி என்பது முழுமைத்தொகுதியின் ஒரு பகுதியாக இருந்த போதிலும், முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றிய விவரங்கள் அனைத்தையும் மாதிரிக் கணிப்பினால் பெற முடியும் என்று எதிர்பார்க்க இயலாது. எனவே பெரும்பாலான சமயங்களில் தொகுதிப் பண்பளவைகளுக்கும், மாதிரிப் பண்பளவைகளுக்கும் இடையே வித்தியாசங்களைக் காண முடிகிறது. இவ்வாறாக ஒரு தொகுதிப் பண்பளவைக்கும், மாதிரிக் கணிப்பின் மூலமாகக் கணிக்கப்பட்ட மதிப்பிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் அல்லது முரண்பாடு மாதிரிக் கணிப்புப்பிழை எனப்படுகிறது.

2. மாதிரிக் கணிப்பில் அல்லாத பிழைகள் (Non sampling errors)

களப்பணி ஆய்வில், நேரிடையாக விவரங்களைச் சேகரிக்க முற்படும் போது சில பிழைகள் ஏற்பட வாய்ப்புகள் உண்டு. இப்பிழைகள் மாதிரிக் கணிப்பில் அல்லாத பிழைகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

மாதிரிக் கணிப்பு முறையின் நன்மைகளும் வரம்புகளும்

முழுக்கணிப்பு முறையை விட மாதிரிக்கணிப்பு முறையில் பல நன்மைகள் உள்ளன. அவை

1. மாதிரிக் கணிப்பு முறை நேரத்தையும் உழைப்பையும் சேமிக்கிறது.
2. அதனால் பணச்செலவும் மனித நேரமும் குறைவதற்குக் காரணமாகிறது.
3. மாதிரிக் கணிப்பு முறையினால் மிகத்துல்லியமான முடிவுகளைப் பெற முடிகிறது.
4. இதற்கு அதிக வாய்ப்பு உள்ளது.
5. இதை அதிக அளவில் உட்படுத்திக் கொள்ள முடிகிறது.
6. முழுமைத் தொகுதியானது மிகப் பெரியதாகவோ எடுகோள் சார்ந்ததாகவோ சோதனையின் போது அழியக் கூடியதாகவோ இருக்குமாயின் மாதிரிக் கணிப்பு முறையை மட்டுமே பயன்படுத்த இயலும்.

மாதிரிக் கணிப்பு முறையை சில வரம்புகளுக்குட்பட்டே எடுக்க வேண்டும். அவை பின்வருமாறு

1. மாதிரிக் கணிப்பில் ஈடுபடுபவர்கள் தகுதி வாய்ந்தவர்களாகவும் நல்ல அனுபவம் பெற்றவர்களாகவும் இருக்க வேண்டும். இல்லையெனில் பெறப்படும் முடிவுகள் நம்பத் தகுந்ததாக இருக்காது.

2. மாதிரியைச் சரியாக தேர்ந்தெடுக்காவிடின் சில சமயங்களில், உகந்த மதிப்புகளைத் தருவதற்கு பதில் விளிம்பு மதிப்புகளைத் தரும்.
3. மாதிரிக் கணிப்பு செய்வதில் மாதிரிப் பிழைகள் இருக்கும். ஆனால் முழுக்கணிப்பு முறையில் மாதிரிப்பிழைகள் ஏற்பட வாய்ப்பில்லை.

மாதிரிக் கணிப்பின் வகைகள்

ஒரு மாதிரியைத் தேர்ந்தெடுப்பதில் உள்ள நுட்பத் திறமையே மாதிரிக்கணிப்பு முறைக்கு அடிப்படை அவசியமாகவும் புள்ளியியல் ஆய்வின் தன்மைக்கு ஏற்ப முக்கியத்துவத்தையும் பெறுகிறது.

மாதிரிக் கணிப்பு முறைகளில் பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படுபவைகளைப் பின்வருமாறு பிரிக்கலாம்.

1. நிகழ்தகவு மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Probability sampling)
2. நிகழ் தகவற்ற மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Non-Probability sampling)
3. கலவை மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Mixed sampling)

நிகழ்தகவு மாதிரிக் கணிப்பு முறை

நிகழ்தகவு மாதிரி என்பது முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து நிகழ்தகவின் மூலமாக உறுப்புகள் தெரிந்தெடுக்கப்படுகிறது. சாதாரண சமவாய்ப்பு மாதிரி, எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ப சரியான விகித அளவில் எடுக்கப்படும் மாதிரி போன்றவை நிகழ்தகவு மாதிரிகளாகும்.

நிகழ்தகவற்ற மாதிரிக் கணிப்பு முறை

இது தன்விருப்பத்தைப் பிரதிபலிக்கும் வகையில் உறுப்புகளை, முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்வு செய்யும் முறையாகும். இம்முறையை நோக்கமுடையமாதிரிக் கணிப்பு (Purposive sampling) என்பர். இம்முறை பெரும்பாலும் கருத்துக் கணிப்புகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. நோக்கமுடை மாதிரிக் கணிப்பைச் சேர்ந்த, பங்கு மாதிரிக் கணிப்பு (Judgement sampling) முறை என்பது அளவீடு செய்யும் போது பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஆனால் களப்பணியாளரின் முன் தீர்மானிக்கும் எண்ணம், தவறுகள் போன்றவற்றால் பெரும்பாலும் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுவதில்லை. இருப்பினும் களப்பணியாளர் முன் அனுபவம் பெற்றவராகவும் திறமைசாலியாகவும் இருந்தால் இக்கணிப்பின் மூலம் நல்ல முடிவுகளைப் பெறலாம். எடுத்துக்காட்டாக, புதிய வகை உந்துகளின் செயல் திறமையைப் பற்றிய சந்தை ஆய்வில் எடுக்கப்படும் மாதிரி, புதிய உந்துகளை வாங்குவோரைப் பங்காகக் கொண்ட மாதிரியைத் தான் எடுக்க வேண்டும்.

கலப்பு மாதிரிக் கணிப்பு

இங்கு மாதிரிகளின் ஒரு பகுதி நிகழ்தகவின் படியாகவும் மற்றொரு பகுதி தேவைக்கேற்ப விதிக்கப்படும் நிலைத்த ஒரு விதியின் படியாகவும் கலந்த முறையோடு

மாதிரிகள் எடுக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறாக எடுக்கப்படும் மாதிரியைக் கொண்டு கணிக்கும் முறைக்கு கலப்பு மாதிரிக் கணிப்பு முறை என்கிறோம்.

மாதிரிகளைத் தெரிவு செய்யும் முறைகள்

இப்பகுதியில் பின்வரும் மூன்று வகையான முறைகளைக் காண்போம்.

1. சாதாரண சமவாய்ப்பிலான மாதிரிக் கணிப்பு முறை
2. பகுதி முறை மாதிரிக் கணிப்பு முறை
3. முறை சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறை

1. சாதாரண சமவாய்ப்பிலமையும் மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Simple random sampling)

ஒரு முடிவுறு முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளைத் தெரிவு செய்யும் போது, ஒவ்வொரு உறுப்பும் தெரிந்தெடுக்கப்பட சமவாய்ப்பு அமையுமானால், அவ்வகையில் பெறப்பட்ட சில உறுப்புகளைக் கொண்ட மாதிரி, சாதாரண சமவாய்ப்பிலமையும் மாதிரி அல்லது சாதாரண ராண்டம் மாதிரி எனப்படும்.

2. மாதிரித்தேர்வு செய்த உறுப்பினை மீண்டும் மாதிரித் தேர்வுக்கு உட்படுத்தாமை (Sampling without replacement)

இம்முறையில் முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகள் மாதிரியில் எடுக்கப்படும்போது ஒரே ஒரு முறை தான் அமையும். அதாவது மாதிரித் தேர்வில் ஓர் உறுப்பைத் தேர்வு செய்த பிறகு அதே உறுப்பு முழுமைத்தொகுதிக்கு மறுபடியும் அனுப்பப் படுவதில்லை.

3. மாதிரித் தேர்வு செய்த உறுப்பினை மீண்டும் மாதிரி தேர்வுக்கு உட்படுத்துதல் (Sampling with replacement)

இம்முறையில், முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் உறுப்புகள், மாதிரியிலிருந்து மீண்டும் அனுப்பப்படுவதால், ஒரு முறைக்கு மேல் அமையும். சாதாரண சமவாய்ப்பிலமையும் மாதிரிக் கணிப்புகள் மேற்கூறிய இரு வகையிலும் அமைகின்றன.

சாதாரண சமவாய்ப்பிலமையும் மாதிரிக் கணிப்புகளைத் தேர்வு செய்யும் முறைகள்

கீழ்க்கண்டவை சாதாரண சமவாய்ப்பிலமையும் மாதிரிக் கணிப்புகளின் சிலவகைகளாகும்.

(அ) குலுக்கல் முறை (Lottery method)

இம்முறை எல்லோரும் நன்கறிந்த எளிமையான முறையாகும். இம்முறையில் முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளுக்கும் எண்கள் தரப்பட்டு அவை ஒவ்வொன்றும் துண்டு சீட்டுகளில் குறிக்கப்படுகின்றன. துண்டு சீட்டுகள் ஒரே அளவு, வடிவம்

மற்றும் வண்ணம் கொண்டதாக இருக்க வேண்டும். அவற்றை நன்கு மடித்து ஒரு கொள்கலனில் கலந்து வைத்திருக்க வேண்டும். பிறகு அனைத்து சீட்டுகளையும் குலுக்கி மாதிரி எண்ணிக்கைக்கு ஏற்றவாறு அவற்றிலிருந்து தேர்வு செய்ய வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வகுப்பில் உள்ள 50 மாணவர்களில் 5 பேரைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமெனில், 50 துண்டு சீட்டுகளில் அம்மாணவர்களின் பெயர் அல்லது வரிசை எண்ணைக் குறிப்பிட்டு அத்தாள்களைக் கலந்துவிட வேண்டும். அவற்றிலிருந்து 5 மாணவர்களைச் சமவாய்ப்பு முறையில் நாம் தேர்ந்தெடுக்கலாம். இம்முறை பரிசுச்சீட்டுக் குலுக்கல் முறையில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. முழுமைத் தொகுதி முடிவுறாதிருப்பின் இக்குலுக்கல் முறையைப் பயன்படுத்த முடியாது.

(ஆ) சமவாய்ப்பில் எண்களைத் தரும் பட்டியல் முறை (Table of Random number method)

முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுறாதிருப்பின், குலுக்கல் முறையைப் பயன்படுத்த முடியாது. இதற்கு மாற்றாக சமவாய்ப்பில் எண்களைத் தரும் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி மாதிரி எடுக்கலாம். தரப்படுத்தப்பட்ட பல வகை ராண்டம் எண்கள் பட்டியல்கள் உள்ளன. அவற்றுள்

i. டிப்பெட்டின் அட்டவணை
ii. ∴பிஸர், யேட்ஸ் உருவாக்கிய அட்டவணை
iii. கெண்டால், ஸ்மித் உருவாக்கிய அட்டவணை முக்கியமானவையாகும்.

இப்பட்டியல்களில் 0, 1, 2. . . . . 9 ஆகிய எண்கள் ஒன்றுக்கொன்று சார்ந்திராத வகையில், சமமாக பல முறை நிகழும் படி அமைக்கப்பட்டிருக்கும். N = 100 அளவுள்ள மாதிரியை ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்க வேண்டுமாயின், அம்மாதிரிக்கான உறுப்புகளுக்கு 001 முதல் 100 முடிய குறிக்கப்பட்டு, மும்மூன்றாக இணைத்து, தொடர்ச்சியாக எடுக்க வேண்டும். (ராண்டம் எண்களின் பட்டியலைப் பிற சேர்க்கையில் காண்க)

ராண்டம் எண்கள் பட்டியலைப் பயன்படுத்தி ஒரு மாதிரியைத் தேர்வு செய்யும் முறை

மாதிரித் தேர்வு செய்யும்போது முழுமைத்தொகுதியில் உறுப்புகளை வரிசை எண் அடிப்படையில் சமமான எண்ணிக்யையுடைய எண்களாக நிர்ணயித்துக் கொள்ள வேண்டும். முழுமைத்தொகுதியின் அளவு 1000 அல்லது 1000க்கும் குறைவாக இருப்பின், அதிலுள்ள உறுப்புகளுக்கு 000, 001, 002, ... 999 என்ற எண்கள் குறியீடாக அளிக்கப்படுகிறது. அட்டவணையில், எண்களைத் தேர்ந்தெடுக்க எந்த இடத்திலிருந்தும், எந்த திசையிலிருந்தும் நிரல் வரிசையாகவோ, நிரை வரிசையாகவோ சென்று தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். ஆனால் தொடர்ச்சியாக இவ்வெண்களைப் பயன்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கைக்குத் தகுந்தபடியும் நம்மிடம் உள்ள ராண்டம் அட்டவணைப் படியும், நம் வசதிக்கேற்றவாறு மாதிரிகளைத் தேர்வு செய்யலாம். அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கும் போது

ஏதேனும் ஒன்று முழுமைத்தொகுதி அளவு “N’’ ஐக் காட்டிலும் பெரிதாக இருந்தால், அந்த எண்ணிலிருந்து “N’’ ஐக் கழித்த பின் கிடைக்கும் எண்ணை எடுத்துக் கொள்ளலாம். இவ்வாறு தொடர்ந்து செய்து மாதிரியின் உறுப்புகளை அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு பகுதியில் 500 குடும்பங்கள் உள்ளன. அவர்களின் வாழ்க்கைத் தரம் பற்றி ஆய்வு செய்ய 15 குடும்பங்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை கீழ்க்கண்ட சமவாய்ப்பில் அமைந்த எண்களின் ஒரு தொகுப்பிலிருந்து ஒரு மாதிரியைத் தேர்ந்தெடு.

4652	3819	8431	2150	2352	2472	0043	3488
9031	7617	1220	4129	7148	1943	4890	1749
2030	2327	7353	6007	9410	9179	2722	8445
0641	1489	0828	0385	8488	0422	7209	4950

தீர்வு

மேற்கண்ட பட்டியலிலிருந்து மூன்றிலக்க எண்களைத் தேர்ந்தெடுக்க எவ்வரிசையிலிருந்தும் நாம் தொடங்கலாம் என்பதறிவோம்.

இப்போது மூன்றாம் வரிசையின் ஆரம்பத்திலிருந்து எண்களை தேர்ந்தெடுக்கத் தொடங்குவோம்.

அவை

203 023 277 353 600 794 109 179

272 284 450 641 148 908 280

இங்கு சில எண்கள் 500 க்கும் மேல் உள்ளதால் அந்த எண்களிலிருந்து 500 ஐக் கழித்து அவற்றைக் கீழே பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

203 023 277 353 100 294 109 179

272 284 450 141 148 408 280

இதுவே நாம் தேர்ந்தெடுத்த மாதிரியாகும்.

(இ) கணிப்பான் (Calculator) மற்றும் கணினியைப் (Computer) பயன்படுத்தி ராண்டம் எண்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

ராண்டம் எண்களை, அறிவியல் கணிப்பான் (Scientific Calculator) மற்றும் கணினியைப் (Computer) பயன்படுத்தியும் உருவாக்கலாம். அவற்றில் இருக்கும் ராண்டம்

எண் தரும் விசையை ஒவ்வொரு முறை அழுத்தும் போதும் வேறு வேறான ராண்டம் எண்களைப் பெறலாம். இம்முறையில் மாதிரிதேர்வு செய்வது, ராண்டம் பட்டியலில் இருந்து தேர்வு செய்யும் முறையைப் போன்றதே.

ராண்டம் மாதிரிகளைப் பயன்படுத்துவதில் உள்ள நிறைகுறைகள்

நிறைகள்

1. தேர்வு, வாய்ப்பின் அடிப்படையில் அமைவதால் தனிப்பட்ட நபரின் விருப்பு, வெறுப்பு தவிர்க்கப்படுகிறது.
2. ராண்டம் மாதிரி, இம்முறையில் தேர்வு செய்யப்படுவதால் ஒருங்கமைந்த முழுமைத் தொகுதியை நன்கு பிரதிபலிக்கிறது.
3. முழுமைத் தொகுதியின் அனைத்து உறுப்புகளைப் பற்றியும் அறிய வேண்டிய அவசியம் இல்லை.
4. முழுமைத்தொகுதியைப் பற்றி அறிந்திராத போது ஒரு மாதிரியின் துல்லியத் தன்மை பற்றி அறிய, அதே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மற்றொரு மாதிரியை எடுத்து சோதனை செய்து முடிவெடுக்க முடிகிறது.
5. இம்முறை மற்ற ராண்டம் மாதிரிகளுக்கும் பயன்படுகிறது.

குறைகள்

1. முழுமைத் தொகுதியின் அளவு மிகவும் அதிகமாக இருக்கும் போது குலுக்கல் முறை அல்லது ராண்டம் எண்கள் பட்டியல் முறை போன்றவற்றைப் பயன்படுத்துவது சிரமமாக இருக்கும்.
2. முழுமைத் தொகுதியின் உறுப்புகளிடையே மிகுந்த வேறுபாடு காணப்படும் போது இம்முறைகள் முழுமைத்தொகுதியினை பிரதிபலிப்பதாக அமையாது.
3. பகுதி முறை மாதிரித் தேர்வைக் காட்டிலும், இம்முறை மாதிரித் தேர்வின் உறுப்புகள் அதிக அளவில் இருக்க வேண்டியுள்ளது.
4. மிகுந்த பரப்பளவைக் கொண்ட பகுதியில் ராண்டம் மாதிரித் தேர்வு செய்ய, கூடுதலான செலவும், நேரமும் தேவைப்படுகிறது.

படுகை முறை மாதிரியெடுக்கும் முறை (Stratified sampling)

மாதிரி எடுத்தலின் பல முறைகளில், பொதுவாக படுகைமுறை மாதிரியெடுத்தலே அதிகம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இம்முறையில் முழுமைத்தொகுதி பல பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொருவர் பிரிவும் படுகை (Stratum) என்று கூறப்படுகிறது. இப்பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றும் அவற்றுக்குள்ளே முடிந்தவரை ஒருங்கமைந்து இருக்கும்படியாகப் பகுக்கப்படுகிறது. பிறகு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் சம வாய்ப்பு முறையில் அமைந்த மாதிரி எடுக்கப்பட்ட பின் அவை ஒன்றாக இணைக்கப்பட்டு நமக்குத் தேவையான படுகை முறை மாதிரி முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது. படுகை முறை மாதிரி முறையை, பகுதி முறை மாதிரி எடுத்தல் என்றும் கூறுவர்.

படுகை முறை மாதிரியெடுத்தலின் வகைகள்

இரு வகையான படுகை முறை மாதிரியெடுத்தல் உள்ளன. அவை விகிதசமமுடையது மற்றும் விகித சமமற்றது ஆகும். விகித சமமுடைய படுகை முறை மாதிரியெடுத்தலில், உட்பிரிவுகளின் விகிதசம எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ப உறுப்புகள் எடுத்துக் கொள்ளப்படும். அதாவது அதிக எண்ணிக்கை உள்ள பிரிவுகளில் எடுக்கப்படும் மாதிரிகளில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்.

முழுமைத்தொகுதியின் அளவு N என்றும், மாதிரியின் அளவு n என்றும் குறிக்கப்படும் போது ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் பெறக் கூடிய மாதிரிப் பின்னம் ஒரு மாறாத எண்ணாகும். இது $\frac{n}{N} = c$ என்று குறிக்கப்படுகிறது. எனவே இம்முறையில் ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் பெறப்படும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அப்படுகையைப் பிரதிபலிப்பதாக அமைகிறது.

விகித சமமற்ற படுகை முறை மாதிரியெடுத்தலில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள படுகைகளின் அளவைக் கருதாமல் ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் சம எண்ணிக்கையிலான உறுப்புகள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 2

500 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு முழுமைத்தொகுதியில் 50 பேரைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை எடுக்க வேண்டும். அவர்கள் 300 பேரைக் கொண்ட A என்ற கல்வி நிறுவனத்திலும் 200 பேரைக் கொண்ட B என்ற கல்வி நிறுவனத்திலும் உள்ளனர் எனில் விகித சமமுடைய படுகைமுறை மாதிரியெடுத்தல் முறையில் எவ்வாறு மாதிரி எடுப்பாய் ?

தீர்வு

இங்கு இரு படுகைகள் N_1 = **200** மற்றும் N_2 = **300** ஆகவும், மொத்த முழுமைத்தொகுதியின்

அளவு $N = N_1 + N_2 =$ **500** ஆகவும் இருக்கிறது. மாதிரியின் அளவு $n = 50$

n_1, n_2 என்பவை இரு படுகைகளின் அளவுகள் என்றால்

$$n_1 = \frac{n}{N} \times N_1 = \frac{50}{100} \times 200 = 20$$

$$n_2 = \frac{n}{N} \times N_2 = \frac{50}{100} \times 300 = 20$$

எனவே A யிலிருந்து 20 பேரையும் B யிலிருந்து 30 பேரையும் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். அவர்களை பிறகு சாதாரண சமவாய்ப்பு மாதிரி முறை மூலம் தேர்வு செய்து கொள்ள வேண்டும்.

படுகை முறை மாதிரியெடுத்தலின் நிறை குறைகள்

நிறைகள்

1. இது முழுமைத்தொகுதியை அதிகம் பிரதிபலிப்பதாக அமையும்.
2. இது அதிக துல்லியத் தன்மைக்கு உறுதி செய்கிறது.
3. முழுமைத் தொகுதி பகுக்கப்பட்டிருந்தால் எளிதில் செயல்படுத்த முடியும்.
4. இடம் மற்றும் பரப்பளவைப் பொறுத்துப் படுகைகளாகப் பிரித்திருந்தால் நேரம் மற்றும் செலவைக் குறைக்க முடிகிறது
5. முழுமைத் தொகுதியானது சீராக இல்லாமல் இருக்கும்போது இம்முறையே பொருத்தமானதாகும்.
6. ஒருங்கமைவற்ற முழுமைத்தொகுதியில் இம்முறையில் மாதிரி எடுத்தால் அது நல்ல முடிவுகளைத் தரும்.

குறைகள்

1. முழுமைத்தொகுதியை ஒருங்கமைந்த படுகைகளாகப் பிரிப்பது என்பது கடினமான செயலாகும். அதற்கு அதிகச் செலவு, நேரம் மற்றும் புள்ளியியல் அனுபவம் பெற்றோரின் உழைப்பு தேவைப்படுகிறது.
2. தவறான பகுதிகளாகவோ சில இடங்களில் ஒன்றுக்கொன்று பொதுவான படுகைகளாக பிரிக்கப்பட்டிருந்தால், தவறான முடிவுகளைப் பெற நேரிடும்.

முறை சார்ந்த மாதிரியெடுக்கும் முறை (Systematic Sampling)

இதன் எளிமையான நடைமுறையாலும், வசதியாக மாதிரி எடுக்க முடிவதாலும், இம்முறை பரந்த அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகளின் முழுப்பட்டியலும் இருந்தால், முறை சார்ந்த மாதிரி எடுத்தலை அடிக்கடிப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். இதை ராண்டம் மாதிரி சார்ந்த மாதிரிக் கணிப்பு முறை (Quasi - random sampling) என்றும் கூறுவர்.

தேர்ந்தெடுக்கும் முறை

இம்முறை ராண்டம் முறையில் தொடங்கி, அதன் அடிப்படையில் மாதிரி முழுவதும் அமைத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. முதல் உறுப்பு ராண்டம் எண்களைக் கொண்டு தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. பிறகு மற்றைய உறுப்புகள் நாம் வரையறுத்த வடிவத்திற்கு உட்பட்டு முதல் உறுப்பைச் சார்ந்து முறையாகவும் தொடர்ச்சியாகவும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இம்முறையை முறை சார்ந்த மாதிரியெடுத்தல் என்கிறோம். இம்முறையில் பட்டியலில் உள்ள ஒவ்வொரு K ஆவது உறுப்பும் மாதிரியில் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகின்றன. முதல் உறுப்பு மட்டும் ராண்டம் முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, இம்முறையில், 500 மாணவர்களில் 50 பேரைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டுமென்றால் முதலில் K ஆவது உறுப்பை பட்டியலிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். K என்பது மாதிரி எடுத்தலின் இடைவெளி ஆகும்.

$$\text{இடைவெளி } K = \frac{\text{முழுமைத் தொகுதி அளவு}}{\text{மாதிரியின் அளவு}}$$

$$K = \frac{500}{50} = 10$$

K= 10 என்பது மாதிரி எடுத்தலின் இடைவெளியாகும். இந்த 10 எண்களுக்குள் ஓர் எண் $i < K$ ஆகுமாயின், ஒவ்வொரு K ஆவது உறுப்பும் அம்மாதிரிக்குள் தேர்ந்தெடுக்கப்படும், i= 5 எனில், நாம் 5, 15, 25, 35, ... ஆகிய எண்களை நாம் தேர்வு செய்து கொள்ள வேண்டும். இங்கு i என்னும் எண் ராண்டம் தொடக்க எண் எனப்படும். இம்முறை மூலம் K வகையான முறை சார்ந்த மாதிரிகள் தொடக்க எண்ணைப் பொறுத்து உருவாகிறது.

நிறைகள்

1. இம்முறை எளிதானதும் வசதியானதுமாகும்.
2. நேரமும் வேலையும் பெருமளவில் குறைகிறது.
3. மிகச் சரியான முறையில் இதை மேற்கொண்டால் முடிவுகள் துல்லியமாகக் கிடைக்கும்.
4. இதை முடிவுறா முழுமைத்தொகுதியில் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

குறைகள்

1. முறை சார்ந்த மாதிரியெடுத்தல் முறையில் முழுமைத்தொகுதி முழுவதையும் பிரதிபலிக்காது.
2. கணிப்பாளர்களின் விருப்பு வெறுப்புகளுக்கு வாய்ப்பிருக்கிறது.

முறை சார்ந்த மாதிரியெடுத்தல் காடுகளில் மரங்களைத் தேர்ந்தெடுத்தல், தொகுதியில் உள்ள வீடுகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல், பதிவேட்டில் தொடர்ச்சியாக உள்ள பதிவுகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுத்தல் போன்றவற்றிற்குப் பயன்படுகிறது.

வினாக்கள்

1. மாதிரிக் கணிப்பு என்றால் என்ன ?
2. ஏன் நாம் மாதிரிக் கணிப்பை நாடுகிறோம் ?
3. மாதிரிக் கணிப்பின் கோட்பாடுகளைக் கூறுக.
4. மாதிரிக் கணிப்பு எடுப்பதின் வரம்புகள் யாவை ?
5. படுகைமுறை மாதிரிக் கணிப்பின் நிறை குறைகளை எழுதுக.

மையப் போக்கு அளவைகள்

அறிமுகம்

முழுமைத் தொகுதி பற்றி அறிய பெரும் அளவிலான கண்டறிந்த புள்ளி விவரங்களை நாம் பெற முடியும். கண்டறிந்த எல்லா புள்ளி விவரங்களிலிருந்து அதன் சிறப்பியல்புகள் குறித்து எந்த முடிவுக்கு வருவதும் நமக்கு இயலாத ஒன்றாக உள்ளது. எனவே ஒரு தொகுதிக்காக ஒரு எண் பெறுதல் நல்லது. அந்த எண்ணானது கண்டறிந்த எல்லா புள்ளி விவரங்களின் சிறப்பு இயல்புகளைத் தெளிவாக படம் பிடித்து காட்ட கூடியதாக இருக்க வேண்டும். அந்த எண்ணே கண்டறிந்த எல்லா புள்ளி விவரங்களின் மைய மதிப்பாக இருக்க கூடும். இந்த மைய மதிப்பே மையப் போக்கு அளவைகள் அல்லது சராசரிகள் அல்லது அளவைகளின் இடம் என்று அழைக்கப்படுகின்றது. ஐந்து வகையான சராசரிகளில் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை, முகடு எளிய சராசரிகள் என்றும், பெருக்குச் சராசரி மற்றும் இசைச் சராசரி சிறப்புச் சராசரிகள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

சராசரி என்பதன் பொருள் பின்வரும் விளக்கங்களாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

- ‘‘சேகரிக்கப்பட்ட எண்களைச் சுற்றி அமைந்திருக்கும் மைய மதிப்பே மையப் போக்களவைகள்”.
- ‘‘சராசரி என்பது முழுத் தொகுதியின் ஒரு பகுதியாக இருப்பினும் தொகுதி முழுமையையும் குறிப்பிடக் கூடியது”
- ‘‘மிகப் பரவலாகப் பயன்படுத்தும் எண்களின் தொகுப்பே அளவைகளின் இடம்” என்றவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

சிறந்த சராசரியின் முக்கிய சிறப்பியல்புகள்

சிறந்த சராசரியானது பின்வரும் சிறப்பியல்புகளைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

1. தெளிவான முறையில் வரையறை செய்யப்பட்டிருக்க வேண்டும்.
2. எளிதில் புரிந்து கொள்வதற்கும், கணக்கிடுவதற்கும் ஏற்ற வகையில் இருக்க வேண்டும்.
3. விவரங்களில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் அடிப்படையாக வைத்து கண்டுபிடிக்கப்படுவதாக இருக்க வேண்டும்.
4. சராசரியின் விளக்கமானது கணித வாய்ப்பாட்டின் வடிவில் இருக்க வேண்டும்.
5. இயற்கணித செயல்பாடுகளில் பயன்படுத்தக் கூடியதாக இருக்க வேண்டும்.
6. மாதிரி நிலைத் தன்மை பெற்றுள்ளதாய் இருக்க வேண்டும்.
7. சராசரியானது புள்ளியியல் கணக்கிடுதலுக்கு அல்லது அதன் செயல்முறைக்கும் பயன்படும் வகையில் இருக்க வேண்டும்.

சிறந்த சராசரியானது மேற்கூறிய சிறப்பியல்புகளை நிறைவு செய்வதோடு, விவரங்களின் பெரும்பாலான அம்சங்களை தெரியப்படுத்துவதாக இருக்க வேண்டும். அதன்

மதிப்பு ஆனது கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் உள்ள உறுப்புகளுக்கு அருகாமையில் இருக்க வேண்டும்.

கூட்டுச் சராசரி அல்லது சராசரி (Arithmetic Mean)

ஒரு மாறியின் கூட்டுச் சராசரி அல்லது சராசரி என்பது அம்மாறியின் மதிப்புகளின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையை மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுக்கக் கிடைக்கும் எண் ஆகும். X என்ற மாறியின் n மதிப்புகள் x_1, x_2 …… x_n எனவும், இதன் கூட்டுச்சராசரி $\bar{x}$, எனவும் கொண்டால்

$$\bar{X} = \frac{X_1+X_2+X_3+\cdots X_n}{N}$$

எடுத்துக்காட்டு 1

2, 4, 6, 8, 10 இவற்றின் சராசரி காண்க.

தீர்வு

$$\bar{X} = \frac{2+4+6+8+10}{5}$$

$$\bar{X} = \frac{30}{5}$$

$$\bar{X} = 6$$

சுருக்கு முறை

இந்த முறையில் தனிப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து விலக்கங்களைக் கணக்கிட்டு கூட்டுச் சராசரியைக் காண ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை அல்லது உத்தேச முறையில் சராசரியை (A என்ற குறியீடு) எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இதன் வாய்ப்பாடு $\bar{X} = A \pm \frac{\sum d}{n}$

இதில் A = உத்தேச சராசரி அல்லது X -ல் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு

d = உத்தேச கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்பின் விலக்கம்

எடுத்துக்காட்டு 2

5 பாடங்களில் மாணவன் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 75, 68, 80, 92, 56 அவனுடைய சராசரி மதிப்பெண் காண்க.

தீர்வு:

	X	d = X-A
	75	7
A	$\boxed{68}$	0
	80	12
	92	24
	56	– 12
	N=5	**∑d=31**

$$\bar{X} = A \pm \frac{\sum d}{N}$$

$$= 68 + \frac{31}{5}$$

$$= 68+6.2$$

$$= 74.2$$

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரம்

பின்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்திற்கு சராசரி காணலாம்.

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

இதில் x = பிரிவின் மைய மதிப்பு

f = பிரிவின் அலைவெண்

N = அலைவெண்களின் கூடுதல் அல்லது மொத்த அலைவெண்கள்

சுருக்கு முறை

$$\bar{X} = A \pm \frac{\sum fd}{N}$$

இதில்

A = 'X' ல் ஏதேனும் அல்லது நடுமதிப்பு

N = மொத்த நிகழ்வெண்

எடுத்துக்காட்டு 3

கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் பரவலைக் கொண்டு கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	64	63	62	61	60	59
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	18	12	9	7	6

தீர்வு:

X	F	Fx	d = X-A	fd
64	8	512	2	16
63	18	1134	1	18
62 A	12	744	0	0
61	9	549	–1	– 9
60	7	420	–2	–14
59	6	354	–3	– 18
	N =60	**∑fx=3713**		**∑fd=– 7**

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{3713}{60}$$

$$\bar{X} = 61.88$$

சுருக்கு முறை

$$\bar{X} = A \pm \frac{\sum fd}{N}$$

$$\bar{X} = 62 - \frac{7}{60}$$

$$\bar{X} = 62 - 0.12$$

$$\bar{X} = 61.88$$

கூட்டுச்சராசரியின் நிறை, குறைகள்

1. திடமாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
2. எளிதில் புரிந்து கொள்வதற்கும், கணக்கிடுவதற்கும் எளிதானது.
3. உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருந்த போதிலும் இதன் மதிப்பு நம்பத் தகுந்ததாகவும், சரியாகவும் இருக்கும்.
4. சராசரியானது கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு மற்றும் இது தொடரில் உள்ள உறுப்புக்களின் இடத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைவதில்லை.
5. விவரங்களில் சில விடுபட்டு இருப்பினும் இவற்றை கணக்கிட இயலும்.
6. மாதிரியின் வேறுபாட்டால் எல்லா சராசரிகளை விட கூட்டுச் சராசரி குறைவாகவே பாதிக்கப்படுகின்றது.
7. ஒப்பிடுவதற்கு நல்ல அடிப்படையாக உள்ளது.

குறைகள்

1. ஆய்வின் மூலமாகவோ அல்லது அலைவெண் வரைபட மூலமாகவோ இதனைப் பெற முடியாது.
2. அறிவுக் கூர்மை, அழகு, நேர்மை போன்ற எண் அளவுகளால் குறிக்க இயலாத பண்புகளை இக்கூட்டுச் சராசரியின் மூலம் காண இயலாது.
3. இதன் துல்லியத் தன்மைக்கு ஏற்றவாறு ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை விட்டு விடலாம்.
4. சராசரியானது முனை உறுப்புகளால் பாதிக்கப்படக் கூடியது.
5. திறந்த பிரிவு இடைவெளிகளில் இதனை கணக்கிட இயலாது.
6. விவரங்கள் கணக்கிடப்பட்டதை விளக்கமாக கொடுக்கப்படவில்லை எனில் இது தவறான முடிவுக்கு வழிவகுக்கும்.

தொடர்ச்சியான தொடர் (**Continuous series**)

தொடர்ச்சியான தொடர் என்பது வர்க்க இடைவெளியின் வடிவத்தில் மாறியின் மதிப்புடன் கூடிய அதிர்வெண்களைக் குறிக்கிறது.

$$\bar{X} = \frac{\sum fm}{N}$$

சுருக்கு முறை

$$\bar{X} = A \pm \frac{\sum fd}{N}$$

Step deviation method

$$\bar{X} = A \pm \frac{\sum fd}{N} \times C$$

இதில்

$d = \frac{X-A}{C}$

A = 'X' ல் ஏதேனும் அல்லது நடுமதிப்பு

N = மொத்த நிகழ்வெண்

c = பிரிவு இடைவெளியின் பிரிவுத் தூரம்

எடுத்துக்காட்டு 4

வேறுபட்ட வருமானப் பிரிவுகளைக் கொண்ட நபர்களின் பரவல் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றிற்கு கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

வருமானம் Rs.(100)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நபர்களின் எண்ணிக்கை	6	8	10	12	7	4	3

தீர்வு:

Income C.I	Number of Persons (f)	Mid Value	$d = \frac{M-A}{c}$	Fd
0-10	6	5	-3	-18
10-20	8	15	-2	-16
20-30	10	25	-1	-10
30-40	12	$\boxed{35}$	0	0
40-50	7	45	1	7
50-60	4	55	2	8
60-70	3	65	3	9
	N=50			**∑fd= -20**

$$\bar{X} = A \pm \frac{\sum fd}{N} \times c$$

$$\bar{X} = 35 - \frac{20}{50} \times 10$$

$$\bar{X} = 35 - \frac{200}{50}$$

$$\bar{X} = 35 - 4$$

$$\bar{X} = 31$$

நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி

ஒரு விவரத்தின் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடும் போது அவ்விவரத்தின் மதிப்புகள் எல்லாமே சம முக்கியத்துவம் பெற்றுள்ளன என எடுத்துக் கொள்கிறோம். செயலளவில் அவ்விதம் இருக்க இயலாது. ஆகவே பரவலில் உள்ள சில மதிப்புகள் மற்ற மதிப்புகளை விட அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை எனில் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் அதன் முக்கியத்துவத்தைப் பொறுத்து நிறை அல்லது எடை கொடுக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு தொகுதி மக்களின் வாழ்க்கைத் தர மாற்றங்களைக் காணும் பொழுது, உபயோகப்படுத்தப்படும் பொருட்களின் விலைகளை எளிய சராசரி மட்டுமே நிர்ணயிக்க இயலாது. ஏனெனில் எல்லா பொருட்களும் சம முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததில்லை. எடுத்துக்காட்டாக அரிசி, கோதுமை, பருப்பு வகை, டீ, மிட்டாய் வகைகளைக் காட்டிலும் அதிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது. நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரியானது ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் சரியான எடை கொடுக்கப்பட்ட பின்னர், தொடரின் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிட பயன்படுகிறது.

வரையறை

நிறையிட்ட கூட்டுச்சராசரியானது, மதிப்புகள் அதன் எடைகளால் பெருக்கப்பட்டு, பெருக்கி வரும் கூடுதலை எடைகளின் மொத்த கூடுதலால் வகுத்து கிடைப்பது ஆகும்.

x_1, x_2 . . . . . . x_n என்ற மதிப்புகளுக்கு கொடுக்கப்படும் நிறைகள் முறையே w_1, w_2 . . . . . . w_n எனில் அம்மதிப்புகளின் நிறையிட்ட கூட்டுச்சராசரி

$$\bar{X}_w = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + \dots + W_i X_i}{W_1 + W_2 + \cdots W_n} = \frac{\sum W_i X_i}{\sum W_i}$$

நிறையிட்ட கூட்டுச்சராசரியின் பயன்கள்

1. குறியீட்டு எண்களை அமைக்கவும்.
2. இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட பல்கலைக் கழகங்களில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை வேறுபடுதலின் போது முடிவுகளை ஒப்பிடவும்.
3. இறப்பு, பிறப்பு விகிதங்களைக் கணக்கிடவும், நிறையிட்ட கூட்டுச்சராசரி பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5

பின்வரும் விவரங்களுக்கு நிறையிட்ட கூட்டுச்சராசரியைக் காண்க..

புதவி	மாத வருமானம் (ரூபாயில்)	பிரிவின் எண்ணிக்கை
முதல் நிலை அலுவலர்	1500	10
இரண்டாம் நிலை அலுவலர்	800	20
சார்நிலை பணியாளர்	500	70
எழுத்தர் பணியாளர்	250	100
கடைநிலை ஊழியர்	100	150

தீர்வு:

புதவி	**மாத வருமானம் (ரூபாயில், X**	**பிரிவின் எண்ணிக்கை,w**	**Wx**
முதல் நிலை அலுவலர்	1500	10	15,000
இரண்டாம் நிலை அலுவலர்	800	20	16,000
சார்நிலை பணியாளர்	500	70	35,000
எழுத்தர் பணியாளர்	250	100	25,000
கடைநிலை ஊழியர்	100	150	15,000
		$\sum$W=350	**$\sum$wx= 1,06,000**

நிறையிட்ட சராசரி $\bar{X}_{\mathrm{w}} = \frac{\sum wx}{\sum w}$

$$\bar{X}_{\mathrm{w}} = \frac{106000}{350}$$

$$\bar{X}_{\mathrm{w}} = 302.86$$

இசைச்சராசரி (Harmonic Mean)

ஒரு மாறியின் மதிப்புகளின் தலைகீழிகளின் சராசரியின் தலைகீழ் அதன் இசைச்சராசரி எனப்படும். X என்ற மாறியின் n மதிப்புகள் $X_{1,}$ X_2 …….. X_n எனில்

$$\text{இசைச்சராசரி} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} f\ (\frac{1}{x_i})}$$

$$\text{அலைவெண் பரவலுக்கான இசைச்சராசரி H.M}= \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} f\ (\frac{1}{x_i})}$$

எடுத்துக்காட்டு 6

5, 10, 17, 24, 30 இவற்றின் இசைச்சராசரி காண்க.

தீர்வு:

X	$\frac{1}{X}$
5	0.2000
10	0.1000
17	0.0588
24	0.0417
30	0.0333
மொத்தம்	**0.4338**

$$\text{இசைச்சராசரி} = \frac{n}{\sum(\frac{1}{x})}$$

$$\text{இசைச்சராசரி} = \frac{5}{0.4338} = 11.526$$

எடுத்துக்காட்டு 7

ஒரு வகுப்பில் சில மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் இசைச்சராசரி காண்க.

மதிப்பெண்கள்	20	21	22	23	24	25
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	2	7	1	3	1

தீர்வு:

மதிப்பெண்கள் (X)	**மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (f)**	$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{f(\frac{1}{x})}$
20	4	0.0500	0.2000
21	2	0.0476	0.0952
22	7	0.0454	0.3178
23	1	0.0435	0.0435
24	3	0.0417	0.1251
25	1	0.0400	0.0400
	N=18		$\sum \boldsymbol{f}\left(\frac{1}{x}\right)$ **=0.8216**

இசைச்சராசரி$= \dfrac{N}{\sum f\left(\frac{1}{x}\right)}$

இசைச்சராசரி$= \dfrac{18}{0.8216} = 21.91$

இசைச்சராசரியின் நிறை, குறைகள்

நிறைகள்

1. இது தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
2. எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இசைச் சராசரி வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
3. இது இயற்கணித செயல்பாடுகளுக்கு இணக்கமாக உள்ளது.
4. இது சிறிய மதிப்புகளுக்கு அதிக முக்கியத்துவத்தையும், பெரிய மதிப்புகளுக்கு குறைந்த முக்கியத்துவத்தையும் கொடுக்கும் இடங்களில், மிக பொருத்தமான சராசரியாக உள்ளது.

குறைகள்

1. இதனை எளிதில் புரிந்து கொள்ள இயலாது.
2. இதனைக் கணக்கிடுதல் கடினம்.
3. இது ஒரு சுருக்கமான எண்ணேத் தவிர அத்தொடரின் சரியான உறுப்பாக இருக்க இயலாது.
4. சிறிய மதிப்புகளுக்கு, அதிக முக்கியத்துவம் கொடுக்கும் இடங்களில் மட்டுமே பயன்படுத்தப்படுகிறது.

பெருக்குச்சராசரி (Geometric Mean)

'n' மதிப்புகளைக் கொண்ட தொடரின் பெருக்குச்சராசரி என்பது n மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகையின் n– வது படி மூலம் ஆகும்.

x_1, x_2 . . . . . . x_n என்ற மதிப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி $=\sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n}$

$$=(x_1 . x_2 \ldots x_3)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Log G.M}=\frac{1}{n} \log\,(x_1 . x_2 \ldots x_n)$$

$$= \frac{1}{n}\,(\log x_1 + \log x_2 \ldots + \log x_n)$$

$$= \frac{\sum log\ x_i}{n}$$

பெருக்குசராசரி = எதிர் மடக்கை $\frac{\sum log\ x_i}{n}$

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரத்திற்கான பெருக்குசராசரி = எதிர் மடக்கை $\left[\frac{\sum f \log x_i}{N}\right]$

எடுத்துக்காட்டு 8

குடும்பங்களில் ஒரு பிரிவின் மாதவருமானம் முறையே 180, 250, 490, 1400, 1050 எனில் பெருக்குச் சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு:

X	log x
180	2.2553
250	2.3979
490	2.6902
1400	3.1461
1050	3.0212
N=5	**∑log x=13.5107**

பெருக்குச்சராசரி = எதிர் மடக்கை $\frac{\sum log\ x_i}{n}$

= எதிர் மடக்கை $\frac{13.5107}{5}$

= எதிர் மடக்கை $= 2.7021 = 503.6$

எடுத்துக்காட்டு 9.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து ஒரு நபரின் சராசரி வருமானத்தைக் கணக்கிடுக. பெருக்குச் சராசரியைப் பயன்படுத்துக.

மக்களின் பிரிவுகள்	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	ஒருவரின் வருட வருமானம்
நிலக்கிழார்	2	5000
பயிரிடுபவர்கள்	100	400
நிலமில்லா தொழிலாளர்கள்	50	200
கடன் கொடுப்பவர்கள்	4	3750
அலுவலக உதவியாளர்	6	3000
கடை முதலாளிகள்	8	750
மரவேலை செய்பவர்கள்	6	600
நெசவாளர்கள்	10	300

தீர்வு:

மக்களின் பிரிவுகள்	ஒருவரின் வருட வருமானம் X	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை (f)	Log x	f log x
நிலக்கிழார்	5000	2	3.6990	7.398
பயிரிடுபவர்கள்	400	100	2.6021	260.210
நிலமில்லா தொழிலாளர்கள்	200	50	2.3010	115.050
கடன் கொடுப்பவர்கள்	3750	4	3.5740	14.296
அலுவலக உதவியாளர்	3000	6	3.4771	20.863
கடை முதலாளிகள்	750	8	2.8751	23.2008
மரவேலை செய்பவர்கள்	600	6	2.7782	16.669
நெசவாளர்கள்	300	10	2.4771	24.771
		N= 186		**482.257**

= எதிர் மடக்கை $\left[\frac{\sum f \log x_i}{N}\right]$

= எதிர் மடக்கை $\left[\frac{482.257}{186}\right]$

= எதிர் மடக்கை $[2.5928]$

= 391.50

பெருக்குச்சராசரியின் நிறை, குறைகள்

நிறைகள்

1. இது தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.
2. இது எல்லா உறுப்புகளையும் சார்ந்துள்ளது.
3. விகிதங்கள், வீதங்கள், சதவீதங்கள் இவற்றின் சராசரி காண்பதில் இது பொருத்தமான ஒன்று.
4. இது மேன்மேலும் பல கணித செயல்பாடுகளுக்கு உகந்தது.
5. கூட்டுச் சராசரியைப் போல இது முனை உறுப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

குறைகள்

1. ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு பூச்சியமாகவோ அல்லது குறை மதிப்புகளாகவோ இருக்கும் இடங்களில் இதனைப் பயன்படுத்த இயலாது.
2. உறுப்புகள் அதிகமாக இருந்தாலோ அல்லது அலைவெண் பரவலாக இருந்தாலோ இதனைக் கணக்கிடுவது கடினம்.
3. விகிதங்களில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அறிய இயலுமே தவிர, கூட்டுச் சராசரியைப் போல் மாற்றங்களில் ஏற்படும் சரியான வித்தியாசத்தை தர இயலாது.
4. தொடரில் உள்ள சரியான மதிப்பாக பெருக்குச் சராசரி இருக்க முடியாது.

இடைநிலை அளவு (Median)

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் மதிப்பு இடைநிலை அளவு எனப்படும். ஒரு விவரத்தின் எந்த ஒரு மதிப்பானது, அம்மதிப்பின் கீழ் அவ்விவரத்தின் பாதி மதிப்புகளையும் அம்மதிப்பின் மேல் பாதி மதிப்புகளையும் கொண்டதாக சமமாகப் பிரிக்கின்றதோ அம்மதிப்பு அவ்விவரத்தின் இடைநிலை அளவு எனப்படும்.

வகைப்படுத்தப்படாத விவரம் அல்லது செப்பனிடா விவரம்

இடைநிலை அளவைக் காண முதலில் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுத வேண்டும். மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றை எண் எனில், இடைநிலை அளவு நடு உறுப்பாகும். மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படை எனில் இடைநிலை அளவு இரு நடு உறுப்புகளின் சராசரி ஆகும்.

இடைநிலை = $\frac{N+1}{2}$ ஆவது உறுப்பு

எடுத்துக்காட்டு 10

பின்வரும் விவரங்களுக்கு இடைநிலை அளவு காண்க. 25, 18, 27, 10, 8, 30, 42, 20, 53

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை 8, 10, 18, 20, 25, 27, 30, 42, 53 என ஏறுவரிசையில் எழுதுக. நடுமதிப்பு 5ஆவது உறுப்பு. அதன் இடைநிலை 25. வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி

இடைநிலை = $\frac{N+1}{2}$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை = $\frac{9+1}{2}$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை = $\frac{10}{2}$ ஆவது உறுப்பு

= 5 ஆவது உறுப்பு = 25

எடுத்துக்காட்டு 11

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் இரட்டை எண்களில் உள்ளன. பின்வரும் விவரங்களுக்கு 5, 8, 12, 30. 18, 10, 2, 22 இடைநிலை காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

2, 5, 8, 10, 12, 18, 22, 30

இங்கு இரு நடு உறுப்புகளின் (10, 12) சராசரி

இடைநிலை = $\frac{N+1}{2}$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை = $\frac{8+1}{2}$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை = $\frac{9}{2}$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை = 4.5 ஆவது உறுப்பு

$$\boxed{\frac{4 \text{ ஆவது உறுப்பு} + 5 \text{ ஆவது உறுப்பு}}{2}}$$

$$\frac{10+12}{2} = \frac{22}{2}\ 11$$

எடுத்துக்காட்டு 12

10 மாணவர்கள் வகுப்புத் தேர்வில் புள்ளியியலிலும், கணக்கியலிலும் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவர்களது அறிவுத் திறன் எந்த பாடப்பகுதியில் அதிகமாக உள்ளது என்பதனை சுட்டிக் காட்டுக.

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்கள் (புள்ளியியல்)	53	55	52	32	30	60	47	46	35	28
மதிப்பெண்கள் (கணக்குப்பதிவியல்)	57	45	24	31	25	84	43	80	32	72

தீர்வு:

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்கள் (புள்ளியியல்)	28	30	32	35	46	47	52	53	55	60
மதிப்பெண்கள் (கணக்குப் பதிவியல்)	24	25	31	32	43	45	57	72	80	84

மையப் போக்கு அளவைகளின் இடைநிலை பொருத்தமான அளவை ஆகும். இரு பாடங்களின் மதிப்பை முதலில் ஏறு வரிசையில் எழுதுக.

இடைநிலை $= \frac{N+1}{2}$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை $= \frac{10+1}{2}$ ஆவது உறுப்பு = **5.5** ஆவது உறுப்பு

$$\frac{5 \text{ ஆவது உறுப்பு} + 6 \text{ ஆவது உறுப்பு}}{2}$$

இடைநிலை (புள்ளியியல்) $= \frac{46+47}{2} = \mathbf{46.5}$

இடைநிலை (கணக்குப் பதிவியல்) $= \frac{43+45}{2} = \mathbf{44}$

எனவே கணக்குப் பதிவியலைக் காட்டிலும் புள்ளியியலில் அறிவுத் திறன் அதிகமாக உள்ளது.

வகைப்படுத்தப்பட்ட விவரம்

வகைப்படுத்தப்பட்ட பரவலில் மதிப்புகள் அலைவெண்ணுடன் சேர்ந்து இருக்கும். தொடர்ச்சியற்ற அலைவெண் பரவலாக அல்லது தொடர்ச்சியான அலைவெண் பரவலாக வகைப்படுத்தப்பட்டு இருப்பினும், உறுப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் காண குவிவு அலைவெண்களைக் கணக்கிட வேண்டும்.

குவிவு அலைவெண்

ஒரு பிரிவின் குவிவு அலைவெண்ணானது அப்பிரிவு அலைவெண்ணுடன் முந்தைய பிரிவின் அலைவெண்ணும் சேர்ந்த கூடுதல் ஆகும். கடைசி குவிவு அலைவெண் என்பது மொத்த உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆகும்.

தொடர்ச்சியற்ற வரிசைக்கு இடைநிலை அளவு காண படிகள்

1. விவரங்களை ஏறுவரிசையிலோ, இறங்கு வரிசையிலோ எழுதுக.
2. குவிவு அலைவெண்களை எழுதுக.
3. $\frac{N+1}{2}$ ஆவது மதிப்பைக் காண்க.
4. $\frac{N+1}{2}$ ஆவது மதிப்பிற்கு அருகே உள்ள குவிவு அலைவெண்ணைக் காண்க.
5. அக்குவிவு அலைவெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள X-இன் மதிப்பு இடைநிலை அளவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 13

ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் விவரங்கள் தெரிவிக்கின்றன. அக்குடும்பத்தின் நபர்களின் இடைநிலை அளவைக் காண்க.

நபர்களின் எண்ணிக்கை x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
அலைவெண் F	1	3	5	6	10	13	9	5	3	2	2	1

தீர்வு:

X	F	Cf
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	6	15
5	10	25
6	13	38

7	9	47
8	5	52
9	3	55
10	2	57
11	2	59
12	1	60
	N=60	

இடைநிலை = $\frac{N+1}{2}$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை = $\frac{60+1}{2}$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை = 30.5 ஆவது உறுப்பு

30.5 ஆவது உறுப்புக்கு சற்று அதிகமாக வரும் குவிவு நிகழ்வெண் 38. அதற்கு ஒத்த X-இன் மதிப்பு 6. எனவே ஒரு குடும்பத்திற்கான உறுப்பினர்களின் இடைநிலை அளவு 6.

குறிப்பு இம்முறையே மிகப் பொருத்தமான முறையாகும். ஏனெனில் கூட்டுச்சராசரியால் பெறப்படும் பின்ன மதிப்பானது உறுப்பினர்களின் சரியான சராசரி அளவைக் குறிப்பதில்லை.

தொடர்ச்சியான வரிசைக்கு இடைநிலை அளவு காணல்

தொடர்ச்சியான வரிசையில் இடைநிலை அளவு கணக்கிட பின்வரும் படிகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

படிகள்

1. குவிவு அலைவெண்களைக் காண்க.
2. $\left(\frac{N}{2}\right)$ ன் மதிப்பு காண்க.
3. $\left(\frac{N}{2}\right)$ க்கு பக்கத்திலுள்ள அதிக குவிவு அலைவெண்ணைக் காண்க. அக்குவிவு அலைவெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள பிரிவு இடைவெளி இடைநிலைப் பிரிவு ஆகும். பிறகு வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடலாம்.
4. இடைநிலை = $\boldsymbol{l} + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times \boldsymbol{C}$

l = இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ் எல்லை.

m = இடைநிலை பிரிவிற்கு முந்தைய குவிவு அலைவெண்.

c = இடைநிலை பிரிவின் பிரிவுத் தூரம்

f = இடைநிலைப் பிரிவின் அலைவெண்

N = மொத்த அலைவெண்

குறிப்பு

சேர்த்துக் கணக்கிடும் முறையில் பிரிவு இடைவெளிகள் கொடுக்கப்படின், அதனைத் தவிர்த்து கணக்கிடும் முறையாக மாற்ற வேண்டும். அதுவே உண்மைப் பிரிவு இடைவெளி எனப்படும். இடைநிலை அளவைக் காண உண்மைப் பிரிவு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 14

பின்வரும் அலைவெண் பரவல் அட்டவணை ஒரு தொழிற்சாலையில் பணிபுரியும் 325 தொழிலாளர்களின் ஒரு வருடத்திற்குரிய சராசரி மாத வருமானத்தைக் குறிக்கிறது. இவற்றைக் கொண்டு இடைநிலை வருமானத்தைக் கணக்கிடுக.

வருமான பிரிவு (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை
Below 100	1
100-150	20
150-200	42
200-250	55
250-300	62
300-350	45
350-400	30
400-450	25
450-500	15
500-550	18
550-600	10
600 and above	2
	325

தீர்வு:

வருமான பிரிவு (பிரிவு இடைவெளி)	தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை (அலைவெண்)	குவிவு அலைவெண் c.f
Below 100	1	1
100-150	20	21
150-200	42	63
200-250	55	118
250-300	62	180
300-350	45	225
350-400	30	255
400-450	25	280
450-500	15	295
500-550	18	313
550-600	10	323
600 and above	2	325
	N=325	

$$\left(\frac{N}{2}\right) = . \left(\frac{325}{2}\right) = 162.5$$

இங்கு

$l = 250$

N = 325

f = 62

c = 50

cf= 118

இடைநிலை = $l + \frac{\frac{N}{2}-cf}{f} \times C$

இடைநிலை = $250 + \frac{162.5-118}{62} \times 50$

இடைநிலை $= 250 + \frac{44.5}{62} \times 50$

இடைநிலை $= 250 + \frac{162.5-118}{62} \times 50$

இடைநிலை $= 250 + \frac{2225}{62}$

இடைநிலை $= 250 + 35.887$

இடைநிலை $= 285.887$

எடுத்துக்காட்டு 15

பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இடைநிலை அளவைக் காணவும்

மதிப்பு	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
அலைவெண்	5	8	10	12	7	6	3	2

தீர்வு:

மதிப்பு	F	உண்மையான பிரிவு இடைவெளி	cf
0-4	5	0.5-4.5	5
5-9	8	4.5-9.5	13
10-14	10	9.5-14.5	23
15-19	12	14.5-19.5	35
20-24	7	19.5-24.5	42
25-29	6	24.5-29.5	48
30-34	3	29.5-34.5	51
35-39	2	34.5-39.5	53
	N=53		

$\left(\frac{N}{2}\right) = \left(\frac{53}{2}\right) = 26.5$

l = 14.5,

N = 53,

f = 12,

c = 5,

cf = 23

இடைநிலை $= l + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times c$

இடைநிலை $= 14.5 + \frac{26.5 - 23}{12} \times 5$

இடைநிலை $= 14.5 + \frac{3.5}{12} \times 5$

இடைநிலை $= 14.5 + \frac{17.5}{12}$

இடைநிலை $= 14.5 + 1.46$

இடைநிலை $= 15.96$

எடுத்துக்காட்டு 16

பின்வரும் விவரங்களுக்கு இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடுக.

நடுமதிப்பு	5	15	25	35	45	55	65	75
அலைவெண்	7	10	15	17	8	4	6	7

தீர்வு:

இதில் மதிப்புகள் 10 இன் மடங்காக இருப்பதால் பிரிவு இடைவெளியின் அகலம் 10 ஆக உள்ளது.

Mid x	C.I	F	c.f
5	0-10	7	7
15	10-20	10	17
25	20-30	15	32

35	30-40	17	49
45	40-50	8	57
55	50-60	4	61
65	60-70	6	67
75	70-80	7	74
		N=74	

$$\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{74}{2} = 37$$

l = 30,

N = 74,

f = 17,

c = 10,

cf = 32

இடைநிலை $= \boldsymbol{l} + \frac{\frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{cf}}{\boldsymbol{f}} \times \boldsymbol{c}$

இடைநிலை $= 30 + \frac{37-32}{17} \times 10$

இடைநிலை $= 30 + \frac{5}{17} \times 10$

இடைநிலை $= 30 + \frac{50}{17}$

இடைநிலை $= 30 + 2.94$

இடைநிலை =**32.94**

இடைநிலை அளவின் நிறை குறைகள்

1. இடைநிலை முனை உறுப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஏனெனில் இது ஒரு இடக் குறியீட்டு சராசரி ஆகும்.திறந்த பிரிவு இடைவெளிக்கான பரவலுக்கு கூட இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடலாம்.

2. விவரமானது முழுமையற்றதாக இருந்தாலும் கூட இடைநிலை அளவைக் காணலாம்.
3. திறன், நேர்மை பண்பளவு காரணிகளுக்கு இடைநிலை அளவைக் கணக்கிடலாம்.

குறைகள்

1. தொடரில் சிறு மாற்றம் இருப்பினும் இடைநிலை அளவின் மதிப்பில் பெரிய அளவில் மாற்றம் ஏற்படும்.
2. தொடர்ச்சியான வரிசை அல்லது இரட்டை எண்ணிக்கை உறுப்புக்களாக இருக்கும்போது இடைநிலையானது, மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட மதிப்பே தவிர தொடரில் உள்ள எதேனும் ஒரு மதிப்பு ஆகாது.
3. சராசரி விலக்கம் காண மட்டுமே பயன்படுகிறதே தவிர மற்ற கணித செயல்பாடுகளுக்கு இது பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

முகடு (Mode)

ஓர் பரவலில் எந்த மதிப்பு அதிக முறை வருகிறதோ, அம்மதிப்பே முகட்டைக் குறிக்கும். எந்த மதிப்பைச் சுற்றி ஏனைய மதிப்புகள் அனைத்தும் அடர்ந்திருக்கின்றனவோ அம்மதிப்பே **முகடு** எனப்படும்.

கிராக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடனின் வரையறைப்படி, எல்லா மதிப்புகளும் ஒரு மதிப்பைச் சுற்றி மிகவும் அடர்ந்திருக்குமே யானால் அந்த மதிப்பே ஒரு பரவலின் முகட்டு மதிப்பாகும். இதுவே தொடரில் உள்ள மதிப்புகளில் முக்கிய மதிப்பாக கருதப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைச் சுற்றி அலைவெண்கள் அதன் மையப்பகுதியில் அடர்ந்திருக்கின்றன என்பதை இது காட்டுகிறது. ஆகையால் அதிக அடர்வு உடைய புள்ளியைக் காண இவற்றை பயன்படுத்துகிறோம். எனவே இது இடக்குறியிட்ட அளவை ஆகும்.

சந்தை ஆய்வுகளின் போது ஒரு மேலாளர் பொருட்களின் எந்த அளவு அதிக அடர்வுள்ளதாக உள்ளது என்பதை அறிய முகட்டைப் பயன்படுத்துகிறார். எடுத்துக்காட்டாக பாதணிகள், மற்றும் ஆயத்த ஆடைகளைத் தயாரிக்கும் போது முகட்டளவு மற்றும் அதனை ஒட்டிய அளவுகளும் பெரிதும் தேவைப்படுகிறது.

முகட்டைக் கணித்தல்

செப்பனிடா விவரங்கள் அல்லது தொகுக்கப்படா விவரங்கள்

ஒரு தொடரில் உள்ள தனிப்பட்ட மதிப்புகள் அல்லது தொகுக்கப்படா விவரங்களின் முகட்டை ஆய்வின் மூலம் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 17

2, 7, 10, 15, 10, 17, 8, 10, 2

முகடு = M_0 = **10**

சில இடங்களில் முகட்டைக் காண இயலாது. ஒரு சில இடங்களில் ஒன்று, அதற்கு மேற்பட்ட முகட்டைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 18

12, 10, 15, 24, 30 (முகடு இல்லை)

7, 10, 15, 12, 7, 14, 24, 10, 7, 20, 10

முகட்டின் மதிப்புகள் 7 மற்றும் 10

தொகுக்கப்பட்ட விவரங்கள்

தொகுக்கப்பட்ட விவரத்தில் முகடு என்பது மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண்ணை ஒத்த Xன் மதிப்பு ஆகும்.

தொடர்ச்சியான பரவல்

மிக உயர்ந்த நிகழ்வெண்ணிற்கு எதிரே உள்ள பிரிவு இடைவெளி முகட்டுப் பிரிவு எனப்படும்.

பிறகு வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி முகட்டை பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

முகடு = $\boldsymbol{l} + \frac{\Delta_1}{\Delta_{1+}\Delta_2} \times \boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{\Delta_1 = f_1 - f_0}$

$\boldsymbol{\Delta_2 = f_1 - f_2}$

இதில் l = முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை

f_1 = முகட்டுப்பிரிவின் நிகழ்வெண்

f_0 = முகட்டுப்பிரிவின் முந்தைய நிகழ்வெண்

f_2 = முகட்டுப்பிரிவின் அடுத்த நிகழ்வெண்

C = முகட்டுப்பிரிவின் பிரிவுத் தூரம்

எடுத்துக்காட்டு 19

கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்கு முகட்டைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்
0-50	5
50-100	14
100-150	40
150-200	91
200-250	150

250-300	87
300-350	60
350-400	38
400 and above	15

தீர்வு

உயர்ந்த நிகழ்வெண் 150 அதற்கு ஒத்த பிரிவு இடைவெளி 200-250. அதுவே முகட்டு பிரிவாகும். இதில்

$l = 200,\ f_1 = 150,\ f_0 = 91,\ f_2 = 87,\ C = 50$

$\Delta_1 = f_1 - f_0$ 150-91 = 59

$\Delta_2 = f_1 - f_2$ 150-87 =63

C=50

முகடு = $M_{0=}$ $\boldsymbol{l} + \frac{\Delta_{\mathbf{1}}}{\Delta_{\mathbf{1}+}\Delta_{\mathbf{2}}} \times \boldsymbol{c}$

$= 200+ \frac{59}{59+63} \times 50$

$= 200+ \frac{2950}{122}$

$=200+ 24.18$

$= 224.18$

பயிற்சி வினாக்கள்

1. மைய நிலைபோக்கு அளவுகளில் கூட்டுச் சராசரியின் நன்மைகள் யாவை?
2. சிறந்த சராசரியின் முக்கிய சிறப்பியல்புகள் யாவை
3. பெருக்குச் சராசரியின் நிறை குறைகளை பற்றி எழுதுக
4. இசைச்சராசரியின் நிறை, குறைகளை பற்றி எழுதுக
5. இடைநிலை அளவு என்றால் என்ன? வரையறு
6. முகடு என்றால் என்ன? விளக்குக

7. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிடுக

மதிப்பெண்கள்	10	20	30	40	50	60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	6	10	8	5	6

(Mean=35)

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிடுக

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
அலைவெண்	5	8	10	8	9

(Mean=27)

9. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இடைநிலை அளவைக் காணவும்

50, 100, 300, 500, 600, 1000, 1150

(Median =500)

10. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இடைநிலை அளவைக் காணவும்

50, 100, 300, 500, 600, 700, 1000, 1150 ***(Median =550)***

11. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இடைநிலை அளவைக் காணவும்

மதிப்பெண்கள்	10	20	30	40	50
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	5	10	4	3

(Median =30)

12. பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து இடைநிலை அளவைக் காணவும்

பிரிவு இடைவெளி	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
அலைவெண்	10	14	20	13	8

(Median =22.125)

13. கீழ்க்கண்ட அலைவெண் பரவலுக்கு முகட்டைக் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	3	6	10	15	8	8

(Mode=34.17)

14. கூட்டு சராசரி இடைநிலை காண்க

மையப்புள்ளி	:	400	600	800	1000	1200	1400
அலைவெண்	:	25	55	30	20	14	6

$(\bar{x} = 748 \;\; m = 681.81)$

15. இசைச் சராசரி கண்டுபிடி

X	:	10	12	14	16	18	20
Y	:	5	18	20	10	6	1

(HM=13.42)

16. இசைச்சராசரி கண்டுபிடி

X	:	1	2	3	4	5
Y	:	2	4	3	2	1

(HM=2.10)

17. பின்வரும் விவரங்களுக்கு கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு இவற்றை காண்க?

பிரிவு இடைவெளி	:	0-4	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-39
அலைவெண்	:	4	7	15	18	12	10	3

(Mean =17, Median=16.86, Mode=16.7)

18. பின்வரும் விவரங்களுக்கு கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு இவற்றை காண்க?

மையப்புள்ளி	:	5	10	15	20	25	30
அலைவெண்	:	5	15	25	30	15	10

(Mean =18.5, Median=19.17, Mode=20)

சிதறல் அளவைகள்

அறிமுகம்

மைய நிலைப் போக்கு அளவைகள் ஒரு பரவலின் மையத் தன்மையை அறிய உதவுகின்றன. ஆனால் பரவலின் மதிப்புகள் மைய நிலைப் போக்கு அளவையினின்று இரு புறமும் எவ்வாறு சிதறி உள்ளன என்பதை அவை வெளிப்படுத்துவதில்லை. அலைவெண் பரவலின் இத்தகைய பண்பை பொதுவாக 'சிதறல்' என்று குறிப்பிடுவர். பரவலின் மதிப்புகளின் இடையே வேறுபாடுகள் அல்லது மாறுபாடுகள் உள்ளன. இந்த மாறுபாடுகளின் அளவை அளக்க வெவ்வேறு வகை சிதறல் அளவைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. ஒரு பரவலின் சிதறல் அளவை மதிப்பு குறைந்து காணப்பட்டால் அப்பரவலின் மதிப்புகள் அதிக சீரானவை என்றும், சிதறல் அளவை மதிப்பு அதிகமாக இருந்தால் அதன் மதிப்புகள் சீரற்றவை என்றும் வெளிப்படுத்தப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு மாணவர்களின் மதிப்பெண்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

மாணவர் I	மாணவர் II
68	85
75	90
65	80
67	25
70	65

மாணவர் ஒவ்வொருவரின் மதிப்பெண் கூடுதல் 345 மற்றும் சராசரி 69 ஆகவும் உள்ளன. உண்மை என்னவென்றால் இரண்டாவது மாணவன் ஒரு பாடத்தில் தோல்வி அடைந்துள்ளான். சராசரிகளை மட்டும் கணக்கில் கொண்டால் இரண்டு மாணவர்களுமே சமம். ஆனால் இரண்டாவது மாணவனை விட முதல் மாணவன் குறைந்த மாறுபாட்டளவை கொண்டவன். குறைந்த மாறுபாடு என்பது கருத்தில் கொள்ள வேண்டிய பண்பாகும்.

சிறந்த சிதறல் அளவைக்குரிய குணாதிசயங்கள்

ஒரு விழுமிய சிதறல் அளவையிடம் எதிர்பார்க்கப்படும் பண்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. இது நன்கு வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.
2. இது பரவலின் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்து அமைதல் வேண்டும்.
3. இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படாததாக இருக்க வேண்டும்.

4. இது மேலும் கணித விரிவாக்கத்திற்கு உட்படுத்திக் கொள்வதாக இருத்தல் வேண்டும்.
5. இது சாதாரணமாக புரிந்து கொள்ளக் கூடியதாக மற்றும் எளிதாக கணக்கிட கூடியதாக இருக்க வேண்டும்.

தனித்த மற்றும் ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள்

இங்கு இரண்டு வகை சிதறல் அளவைகள் உள்ளன. அவை

1. தனித்த சிதறல் அளவைகள்
2. ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள்

ஒரு தொகுதி மதிப்புகளின் மாறுபாட்டு அளவையை அந்த மதிப்புகளின் அலகுகளைக் கொண்டே குறிப்பது தனித்த சிதறல் அளவைகளாகும். எடுத்துக்காட்டாக வெவ்வேறு நாட்களில் பெய்த மழை அளவுகள் மி.மீ என்ற அலகில் கிடைக்கப் பெற்றால் அவற்றின் மாறுபாட்டளவையும், எந்த ஒரு சிதறல் அளவையும் மி.மீ என்ற அலகிலேயே இருக்கும். இதற்கு மாறாக ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள் அலகினை கொள்ளாமல் மூல அலகில்லாத ஓர் எண்ணாகிறது. வெவ்வேறு அலகுகளைக் கொண்ட இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொகுதிகளின் மாறுபாட்டை ஒப்பிடுவதற்கு இவை பயன்படுகின்றன.

வெவ்வேறு தனித்த மற்றும் ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவைகள். கீழே பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.

தனித்த அளவை	**ஒப்பீட்டு அளவை**
1. வீச்சு	1. வீச்சுக் கெழு
2. கால்மான விலக்கம்	2. கால்மான விலக்கக் கெழு
3. சராசரி விலக்கம்	3. சராசரி விலக்கக் கெழு
4. திட்ட விலக்கம்	4. மாறுபாட்டுக் கெழு

வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழு

வீச்சு

இது மிகவும் சாதாரண சிதறல் அளவையாகும். இது மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச் சிறிய மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறியீட்டில், வீச்சு = $L - S$

இங்கு L = மிகப் பெரிய மதிப்பு,

S = மிகச் சிறிய மதிப்பு

தனித்தொகுதி மற்றும் தொடர்ச்சியற்ற தொகுதிகளில் L மற்றும் S எளிதாக அறியப்படுகிறது. தொடர் தொகுதியில் கீழ்கண்ட இரண்டு முறைகள் பின்பற்றப்படுகின்றன.

முறை 1

L = அதிகபட்ச பிரிவின் மேல் எல்லை

S = குறைந்தபட்ச பிரிவின் கீழ் எல்லை

முறை 2

L = அதிகபட்ச பிரிவின் மைய மதிப்பு

S = குறைந்தபட்ச பிரிவின் மைய மதிப்பு

வீச்சுக் கெழு

வீச்சுக் கெழு $= \frac{L-S}{L+S}$

எடுத்துக்காட்டு 1

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு வீச்சு மற்றும் அதன் கெழுவை காண்க.

7, 9, 6, 8, 11, 10

தீர்வு

L = 11, S = 4

வீச்சு = L – S = 11- 4 = 7

வீச்சுக் கெழு $= \frac{L-S}{L+S}$

வீச்சுக் கெழு $= \frac{11-4}{11+4}$

வீச்சுக் கெழு $= \frac{7}{15} = 0.4667$

எடுத்துக்காட்டு 2

கீழ்கண்ட பரவலிலிருந்து வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழுவை கணக்கிடுக.

அளவு	60-63	63-66	66-69	69-72	72-75
எண்ணிக்கை	5	18	42	27	8

தீர்வு

L = அதிகபட்ச பிரிவின் மேல் எல்லை = **75**

S = குறைந்தபட்ச பிரிவின் கீழ் எல்லை = **60**

வீச்சு = L – S = 75 – 60 = 15

வீச்சுக் கெழு = $\frac{L-S}{L+S}$

வீச்சுக் கெழு = $\frac{75-60}{75+60}$

வீச்சுக் கெழு = $\frac{15}{135} = 0.1111$

வீச்சின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள்

சிறப்பியல்புகள்

1. இது புரிந்து கொள்வதற்கு எளிதானது.
2. இது கணக்கிடுவதற்கு எளிதானது.
3. தரக்கட்டுப்பாடு, தட்ப வெப்பநிலை முன்னறிதல், மற்றும் பங்கு விலை ஆய்வு போன்ற பல வகை கணக்குகளில் வீச்சு பெரிதும் பயன்படுகிறது.

குறைபாடுகள்

1. இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பெரிதும் பாதிக்கப்படுகின்றது.
2. இது இரு விளிம்பு மதிப்புகளை மட்டும் சார்ந்துள்ளது.
3. திறந்த-வெளி பிரிவு இடைவெளிகளில் இதை கணக்கிட முடியாது.
4. இது மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்ததல்ல.
5. இது எப்போதாவது பயன்படுத்தப்படும் அளவை.

காலமான விலக்கம் மற்றும் காலமான விலக்கக் கெழு (Quartile Deviation and Coefficient of quartile deviation)

காலமான விலக்கம் (Q.D)

வரையறை

காலமான விலக்கமானது, முதல் மற்றும் மூன்றாம் காலமான விலக்கங்களிடையே உள்ள வித்தியாசத்தில் பாதியாகும். எனவே இது அரை இடைக் காலமான வீச்சு எனப்படுகிறது. குறியீடுகளில், Q .D = $\frac{Q_3-Q_1}{2}$. Q_1, Q_2 மற்றும் Q_3 என்ற காலமானங்களில், Q_3

− Q_1 என்பது இடைக்கால்மான வீச்சு எனவும், $\frac{Q_3-Q_1}{2}$ அரை இடைக் காலமான வீச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

கால்மான விலக்கக் கெழு

கால்மான விலக்கக் கெழு $Q.D = \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$.

எடுத்துக்காட்டு 3

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு கால்மான விலக்கத்தை காண்க.

391, 384, 591, 407, 672, 522, 777, 733, 1490, 2488

தீர்வு

கொடுத்திருக்கும் மதிப்புகளை ஏறுவரிசையில் அமைக்கவும்.

384, 391, 407, 522, 591, 672, 733, 777, 1490, 2488

Q_1 மதிப்பு = $\frac{N+1}{4} = \frac{10+1}{4} = \frac{11}{4} =$ 2.75ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

Q_1 = 2 ஆவது மதிப்பு + 0.75 (3 ஆவது மதிப்பு - 2 ஆவது மதிப்பு)

= 391 + 0.75 (407 – 391)

= 391 + 0.75 × 16

= 391 + 12 = 403

Q_3 இன் மதிப்பு, $3\left(\frac{N+1}{4}\right) = 3 \times 2.75 = 8.25$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது

Q_3 = 8 ஆவது மதிப்பு + 0.25 (9 ஆவது மதிப்பு - 8 ஆவது மதிப்பு)

= 777 + 0.25 (1490 – 777)

= 777 + 0.25 (713)

= 777 + 178.25

= 955.25

$$\mathbf{Q.D = \frac{Q_3-Q_1}{2}}.$$

$$Q.D = \frac{955.25-403}{2}.$$

$\mathrm{Q.D} = \frac{552.25}{2}$.

Q.D = 276.125

எடுத்துக்காட்டு 4

கூலித் தொழிலாளர்களின் வார ஊதியங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழு இவற்றை கணக்கிடுக.

வார ஊதியம் (ரூ)	100	200	400	500	600
வாரங்களின் எண்ணிக்கை	5	8	21	12	6

தீர்வு

வார ஊதியம் (ரூ)	வாரங்களின் எண்ணிக்கை	வாரங்களின் திறள் எண்ணிக்கை
100	5	5
200	8	13
400	21	34
500	12	46
600	6	52
Total	**N = 52**	

Q_1 மதிப்பு = $\frac{N+1}{4} = \frac{52+1}{4} = \frac{53}{4} = 13.25$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

Q_1 = 13 ஆவது மதிப்பு + 0.25 (14 ஆவது மதிப்பு -13ஆவது மதிப்பு)

= 13 ஆவது மதிப்பு 0.25 (400 – 200)

= 200 + 0.25 (400 – 200)

= 200 + 0.25 (200)

= 200 + 50 = 250

Q_3 இன் மதிப்பு, $3\left(\frac{N+1}{4}\right) = 3 \times 13.25 = 39.75$ ஆவது உறுப்பின் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது

Q_3 = 39 ஆவது மதிப்பு + 0.75 (40 ஆவது மதிப்பு - 39 ஆவது மதிப்பு)

= 500 + 0.75 (500 – 500)

= 500 + 0.75 × 0 = 500

$$\mathbf{Q.D} = \frac{\boldsymbol{Q_3 - Q_1}}{\mathbf{2}}.$$

$$\mathrm{Q.D} = \frac{500-250}{2}.$$

$$\mathrm{Q.D} = \frac{250}{2}.$$

Q.D = 125

கால்மான விலக்கக் கெழு $\mathrm{Q.D} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}.$

கால்மான விலக்கக் கெழு $\mathrm{Q.D} = \frac{500-250}{500+250}.$

கால்மான விலக்கக் கெழு $\mathrm{Q.D} = \frac{250}{750}. = 0\ 3333$

எடுத்துக்காட்டு 5

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு, கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழு காண்க.

X	351 – 500	501 – 650	651 – 800	801–950	951–1100
f	48	189	88	47	28

தீர்வு

பிரிவு இடைவெளி	அலைவெண்	உண்மை பிரிவு இடைவெளிகள்	குவிவு அலைவெண்
351-500	48	350.5-500.5	48
501-650 (Q_1)	189	500.5-650.5	237

651-800 (Q_3)	88	650.5-800.5	325
801-950	47	800.5-950.5	372
951-1100	28	950.5-1100.5	400
மொத்தம்	**N = 400**		

$$\boldsymbol{Q_1 = l \pm \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times C}$$

$$\frac{N}{4} = \frac{400}{4} = 100$$

Q_1 பிரிவு 500.5 – 650.5

$l_1 = 500.5$, $m_1 = 48$, $f_1 = 189$, $c_1 = 150$

$$Q_1 = 500.5 + \frac{100 - 48}{189} \times 150$$

$$Q_1 = 500.5 + \frac{52}{189} \times 150$$

$$Q_1 = 500.5 + \frac{52 \times 150}{189}$$

$$Q_1 = 500.5 + \frac{7800}{189}$$

$$Q_1 = 500.5 + 41.27$$

$$Q_1 = 541.77$$

$$\boldsymbol{Q_3 = l \pm \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - cf}{f} \times C}$$

$$3\left(\frac{N}{4}\right) = 3 \times 100 = 300$$

Q_3 பிரிவு 650.5 – 800.5

$l = 650.5$, $cf = 237$, $f = 88$, $c = 150$

$$Q_3 = 650.5 + \frac{300 - 237}{88} \times 150$$

$$Q_3 = 650.5 + \frac{63}{88} \times 150$$

$$Q_3 = 650.5 + \frac{63 \times 150}{88}$$

$$Q_3 = 650.5 + 107.39$$

$$Q_3 = 751.89$$

$$\mathbf{Q.D} = \frac{\boldsymbol{Q_3 - Q_1}}{\mathbf{2}}.$$

$$\mathrm{Q.D} = \frac{751.89 - 541.77}{2}$$

$$\mathrm{Q.D} = \frac{216.12}{2}$$

$$\mathrm{Q.D} = 108.06$$

கால்மான விலக்கக் கெழு $\mathrm{Q.D} = \dfrac{\boldsymbol{Q_3 - Q_1}}{\boldsymbol{Q_3 + Q_1}}.$

$$= \frac{751.89 - 541.77}{751.89 + 541.77}$$

$$= \frac{216.12}{1299.66}.$$

$$= 0.1663$$

கால்மான விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள்

சிறப்பியல்புகள்

1. இது புரிந்து கொள்வதற்கு சுலபமாகவும் மற்றும் கணக்கிடுவதற்கு எளிதானதாகவும் உள்ளது.
2. இது விளிம்பு மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படாது.
3. இதை திறந்த வெளி பிரிவு விவரங்களிலும் கணக்கிட இயலும்.

குறைபாடுகள்

1. இது எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்து அமைவதில்லை. இது Q_1 மற்றும் Q_3 இரண்டை மட்டும் சார்ந்து அமையும். மேலும் 50 சதவீத விளிம்பு மதிப்புகளை இது தவிர்க்கிறது.
2. இது மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்தது அல்ல.
3. இது, மாதிரி முறை ஏற்றத் தாழ்வுகளால் பாதிக்கப்படுகிறது.

சராசரி விலக்கம் மற்றும் சராசரி விலக்கக் கெழு (Mean Deviation and Coefficient of mean deviation)

சராசரி விலக்கம்

வீச்சு மற்றும் கால்மான விலக்கம் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்தவை அல்ல. அவை இடம் அமைவதைக் குறிக்கும் அளவைகளாகும். ஒரு சராசரியிலிருந்து பரவலின் மதிப்புகள் எந்த அளவு சிதறி உள்ளன என்பதை இவை வெளிப்படுத்துவதில்லை. சிதறல் அளவையான சராசரி விலக்கம் பரவலின் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்து உள்ளது.

வரையறை

ஏதாவது ஒரு மையப் போக்கு அளவையிலிருந்து, தொடரின் மதிப்புகள் ஏற்படுத்தும் விலக்கங்களின் சராசரியே சராசரி விலக்கமாகும். மையப் போக்கு அளவையானது கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடைநிலை அல்லது முகடு ஆகும். எல்லா விலக்கங்களும் நேரிடை மதிப்புகளாகவே எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. அதாவது குறிகள் தவிர்க்கப்படுகின்றன. கிளார்க் மற்றும் சேக்கடே கூற்றின் படி

'சராசரி விலக்கமானது, பரவலின் மதிப்புகள் சராசரியாக எந்த அளவு கூட்டுச் சராசரி அல்லது இடைநிலையிலிருந்து சிதறி உள்ளன என்பதை குறிகளை தவிர்க்கும் நிலையில் கூறுவதாகும்'.

நாம் பொதுவாக சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை அல்லது முகடு இதில் ஏதாவதொன்றிலிருந்து கணக்கிடுவோம். சில நேரங்களில் முகட்டை வரையறுக்க இயலாது. ஆகவே சராசரி விலக்கம் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது. கூட்டுச்சராசரி மற்றம் இடைநிலையில் இடைநிலையே விரும்பத்தக்கது. ஆனால் பொதுவான வழக்கத்தில், கூட்டுச்சராசரியின் பயன்பாடுகள் அதிகமாக உள்ளதால், சராசரி விலக்கம் பொதுவாக கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது. சராசரி விலக்கத்தை குறிப்பிட M.D என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

சராசரி விலக்கக் கெழு

எந்த ஒரு மையப் போக்கு அளவையிலிருந்தும் கணக்கிடப்படும் சராசரி விலக்கமானது ஒரு தனித்த சிதறல் அளவையாகும். இரண்டு வெவ்வேறு தொடர்களின் மாறுபாட்டை ஒப்பிட்டு பார்க்க, ஒரு ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவை தேவைப்படுகிறது. சராசரி விலக்கத்தை பயன்படுத்தப்படும் சராசரியால் வகுத்து, ஒப்பீட்டு சராசரி விலக்கத்தை பெறலாம். சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\textbf{சராசரி விலக்கம்}}{\textbf{கூட்டுச் சராசரி (அல்லது) இடைநிலை (அல்லது) முகடு}}$$

வேண்டிய மதிப்பு சதவீதத்தில் பெறப்பட வேண்டுமாயின், சராசரி விலக்கக் கெழு

$$= \frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி (அல்லது) இடைநிலை (அல்லது) முகடு}} \times 100$$

சராசரி விலக்கத்தை கணக்கிடல்

தனித் தொகுதிகள்

1. தொகுதிகளின் கூட்டுச்சராசரி, இடைநிலை அல்லது முகடு இவற்றை கணக்கிடவும்.
2. சராசரியிலிருந்து மதிப்புகளின் விலக்கங்களை குறிகளை தவிர்க்கும் நிலையில் எடுக்கவும். அவற்றை |D| என்று குறிப்பிடவும்.
3. அந்த விலக்கங்களின் மொத்தத்தை கணக்கிடவும் அதாவது Σ |D|
4. கண்டுபிடிக்கப்பட்ட மொத்தத்தை, மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கவும்.

குறியீடுகளில், சராசரி விலக்கம் $= \frac{\sum|D|}{n}$

எடுத்துக்காட்டு 6

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டு சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடு. மேலும் சராசரி விலக்கக் கெழுக்களையும் காண்க.

100, 150, 200, 250, 360, 490, 500, 600, 671

தீர்வு

கூட்டுச் சராசரி = $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$; $\bar{X} = \frac{3321}{9} = 369$

இப்பொழுது விவரங்களை ஏறுவரிசையில் அமைக்கவும்.

100, 150, 200, 250, 360, 490, 500, 600, 671

இடைநிலை = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

இடைநிலை = $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

இடைநிலை = **5** ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = **360**

X	$\lvert D\rvert = \lvert X - \bar{X}\rvert$	$\lvert D\rvert = \lvert X - median\rvert$
100	269	260
150	219	210
200	169	160

250	119	110
360	9	0
490	121	130
500	131	140
600	231	240
671	302	311
3321	$\sum\|D\| = 1570$	$\sum\|D\| = 1561$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலக்கம் = $\frac{\sum|D|}{n}$

$$= \frac{1570}{9}$$

$$= 174.44$$

$$\textbf{சராசரி விலக்கக் கெழு} = \frac{\textbf{சராசரி விலக்கம்}}{\textbf{கூட்டுச் சராசரி}}$$

$$= \frac{174.44}{369}$$

$$= 0.47$$

இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் = $\frac{\sum|D|}{n}$

$$= \frac{1561}{9}$$

$$= 173.44$$

$$\textbf{சராசரி விலக்கக் கெழு} = \frac{\textbf{சராசரி விலக்கம்}}{\textbf{இடைநிலை}}$$

$$= \frac{173.44}{360}$$

$$= 0.48$$

சராசரி விலக்கம் - தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி

படிகள்

1. ஒரு சராசரியைக் காண்க (கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அல்லது முகடு)
2. சராசரியிலிருந்து மாறியின் மதிப்புகளுக்கு விலக்கங்களை, குறிகளை தவிர்க்கும் நிலையில் கண்டுபிடித்து அவற்றை |D| எனக் குறிப்பிடுக.
3. ஒவ்வொரு மதிப்பின் விலக்கத்தையும், அதற்கரிய அலைவெண்ணைப் பெருக்கி, அவற்றின் மொத்தம் ∑f | D| கண்டுபிடி
4. Σf | D| ஐ N ஆல் வகுக்கவும்.

குறியீடுகளில், சராசரி விலக்கம் = $\frac{\Sigma f \mid D \mid}{N}$

எடுத்துக்காட்டு 7

கீழ்கண்ட விவரங்களிலிருந்து சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டுச்சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடுக.

உயரம் (செ.மீ)	158	159	160	161	162	163	164	165	166
நபர்களின் எண்ணிக்கை	15	20	32	35	33	22	20	10	8

மேலும் சராசரி விலக்கக் கெழுவையும் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

உயரம் X	நபர்களின் எண்ணிக்கை F	d = x-A A = 162	Fd	|D| = |X-mean|	f|D|
158	15	-4	-60	3.51	52.65
159	20	-3	-60	2.51	50.20
160	32	-2	-64	1.51	48.32
161	35	-1	-35	0.51	17.85
162	33	0	0	0.49	16.17

163	22	1	22	1.49	32.78
164	20	2	40	2.49	49.80
165	10	3	30	3.49	34.90
166	8	4	32	4.49	35.92
	N=195		**$\sum$fd=-95**		**$\sum$f|D|=338.59**

$$\bar{X} = A \pm \frac{\sum fd}{N}$$

$$\bar{X} = 162 - \frac{95}{195}$$

$$\bar{X} = 162 - 0.49$$

$$\bar{X} = 161.51$$

சராசரி விலக்கம் = $\frac{\Sigma f \mid D \mid}{N} = \frac{338.59}{195} = 1.74$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\frac{1.74}{161.51}$ = **0.0108**

உயரம் x	நபர்களின் எண்ணிக்கை F	c.f.	|D| = |X – Median|	f |D|
158	15	15	3	45
159	20	35	2	40
160	32	67	1	32
161	35	102	0	0
162	33	135	1	33
163	22	157	2	44
164	20	177	3	60
165	10	187	4	40
166	8	195	5	40
	N=195			**$\sum$ f |D|=334**

இடைநிலை= $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

இடைநிலை= $\left(\frac{195+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு

இடைநிலை= **98** ஆவது உறுப்பின் மதிப்பு = 161

சராசரி விலக்கம் = $\frac{\mathbf{\Sigma f\,|\,D|}}{\boldsymbol{N}}$

சராசரி விலக்கம் = $\frac{\mathbf{334}}{\mathbf{195}} = 1.71$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\frac{1.71}{161}$ = 0.0106

சராசரி விலக்கம் - தொடர் தொகுதி

தொடர் தொகுதியில் சராசரி விலக்கம் கணக்கிடும் முறை, தொடர்ச்சியற்ற தொகுதியில் கணக்கிடும் முறைக்கு ஒத்ததாகும். தொடர் தொகுதியில் வெவ்வேறு பிரிவுகளின் மையப் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடித்து, தேர்ந்தெடுத்த சராசரியிலிருந்து அவற்றிற்கு விலக்கங்களைக் காண வேண்டும்.

சராசரி விலக்கம் $= \frac{\Sigma f\,|D|}{N}$

இங்கு D = m − சராசரி m = மையப்புள்ளி

எடுத்துக்காட்டு 8

கீழ்க்கண்ட விவரங்களிலிருந்து சராசரி விலக்கத்தை, கூட்டுச் சராசரி மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து காண்க.

வயது (ஆண்டுகளில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை
0-10	20
10-20	25
20-30	32
30-40	40
40-50	42
50-60	35
60-70	10
70-80	8

மேலும் சராசரி விலக்க கெழுவை கணக்கிடுக.

தீர்வு

X	M	F	$d = \frac{M-A}{C}$ (A=35, C=10)	Fd	$\lvert D \rvert = \lvert m - \bar{x} \rvert$	f |D|
0-10	5	20	-3	-60	31.5	630.0
10-20	15	25	-2	-50	21.5	537.5

20-30	25	32	-1	-32	11.5	368.0
30-40	**35**	40	0	0	1.5	60.0
40-50	45	42	1	42	8.5	357.0
50-60	55	35	2	70	18.5	647.5
60-70	65	10	3	30	28.5	285.0
70-80	75	8	4	32	**38.5**	308.0
		N=212		**∑fd=32**		**∑f|D|=3192.5**

$\bar{X} = A \pm \frac{\sum fd}{N} \times c$

$\bar{X} = 35 + \frac{32}{212} \times 10$

$\bar{X} = 35 + \frac{320}{212}$

$\bar{X} = 35 + 1.51$

$\bar{X} = 36.51$

சராசரி விலக்கம் = $\frac{\mathbf{\Sigma f \mid D \mid}}{\boldsymbol{N}}$

சராசரி விலக்கம் = $\frac{\mathbf{3192.5}}{\mathbf{212}}$ **=** 15.06

சராசரி விலக்கக் கெழு = $\frac{15.06}{36.51} = 0.41$

இடைநிலை மற்றும் இடைநிலையிலிருந்து சராசரி விலக்கம் கணக்கிடல்

X	**M**	**F**	**c.f**	**|D| = |m-Md|**	**f | D |**
0-10	5	20	20	32.25	645.00

10-20	15	25	45	22.25	556.25
20-30	25	32	77	12.25	392.00
30-40	35	40	117	2.25	90.00
40-50	45	42	159	7.75	325.50
50-60	55	35	194	17.75	621.25
60-70	65	10	204	27.75	277.50
70-80	75	8	212	37.75	302.00
		N=212			**∑f|D|=3209.50**

இடைநிலை$= \boldsymbol{l} + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times \boldsymbol{C}$

$\frac{N}{2} = \frac{212}{2} = 106$

l = 30, m = 77, f = 40, c = 10

இடைநிலை$= 30 + \frac{106-77}{40} \times 10$

இடைநிலை$= 30 + \frac{29}{40} \times 10$

இடைநிலை$= 30 + \frac{290}{40}$

இடைநிலை$= 30 + 7.25.$

இடைநிலை$= 37.25$

சராசரி விலக்கம் $= \frac{\boldsymbol{\Sigma f \mid D \mid}}{\boldsymbol{N}}$

$$\text{சராசரி விலக்கம்} = \frac{\mathbf{3209.5}}{\mathbf{212}} = 15.14$$

$$\textbf{சராசரி விலக்கக் கெழு} = \frac{\text{சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$$

$$\textbf{சராசரி விலக்கக் கெழு} = \frac{15.14}{37.25} = 0.41$$

சராசரி விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள்

சிறப்பியல்புகள்

1. இது புரிந்து கொள்ளவும் மற்றம் கணக்கிடவும் எளிதானது.
2. இது தீர்மானமாக வரையறுக்கப்பட்டது.
3. இது தொடரின் எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்தது.
4. இது மாதிரி கூறின் ஏற்றத்தாழ்வுகளால் அதிகமாக பாதிக்கப்படாதது
5. இது விளிம்பு உறுப்புகளால் குறைந்த அளவில் பாதிக்கப்படுகிறது.
6. இது எளிதில் கையாளக் கூடியது. ஏனென்றால் இதை எந்தவொரு சராசரியிலிருந்தும் கணக்கிடலாம்.
7. ஒப்பிடுதலுக்கு இந்த அளவை சிறந்தது.

குறைபாடுகள்

1. இது மிகவும் துல்லியமான சிதறல் அளவையன்று.
2. இது மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்ததல்ல.
3. இது எப்போதாவது பயன்படும் அளவை இது திட்ட விலக்கத்தை போன்று சிறப்பு பெற்றதல்ல.
4. இதைக் கணக்கிடுவதில் கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து மதிப்புகளுக்குள்ள விலக்கங்களின் குறி புறக்கணிக்கப்படுவதால் அது இயற்கணிப்புக்கு இணங்காத அளவையாகிறது.

திட்டவிலக்கம் மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு (Standard Deviation and Coefficient of Standard Deviation)

திட்டவிலக்கம்

கார்ல் பியர்சன் 1893-ஆம் ஆண்டு திட்ட விலக்கம் என்ற கொள்கையை அறிமுகப்படுத்தினார். சிதறல் அளவைகளில் இது மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது. மேலும் பல புள்ளியியல் சூத்திரங்களில் அதிக அளவில் பயன்படுத்துவதுமாகும். திட்ட விலக்கம், விலக்க வர்க்க சராசரியின் வர்க்க மூலம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. காரணம் என்னவென்றால் இது கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட வர்க்க விலக்கங்களின் சராசரியின்

வர்க்க மூலமாகும். இது துல்லியமாக மதிப்பை அளிக்கிறது. திட்ட விலக்கத்தின் வர்க்கம் மாறுபாடு என்றழைக்கப்படுகிறது.

வரையளவு

இது கூட்டுச்சராசரியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் மதிப்புகளுக்கு பெறப்படும் விலக்கங்களின் சராசரியின் நேரிடை வர்க்க மூலம் என்றும் வரையறுக்கப்படுகிறது. திட்டவிலக்கம் σ (sigma) என்ற கிரீக் (Greek) எழுத்து மூலம் குறிப்பிடப்படுகிறது.

திட்டவிலக்கம் கணக்கிடல் - தனித்தொடர்

தனித்தொடரில் திட்ட விலக்கத்தை கணக்கிட இரண்டு முறைகள் உள்ளன.

அ) உண்மையான சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல்.

ஆ) ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல்.

(அ) உண்மையான சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல்

கூட்டுச் சராசரி முழு எண்ணாக இருக்கும் போது இந்த முறையை பயன்படுத்தலாம்.

படிகள்

1. தொடரின் கூட்டுச் சராசரியை காண்க (x)
2. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் விலக்கத்தை காண்க($x = X - \bar{X}$)
3. விலக்கங்களின் வர்க்கத்தை கண்டுபிடித்து அதன் மொத்தத்தையும் காண் $\sum x^2$
4. மொத்தம் $\left(\frac{\sum X^2}{N}\right)$மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுக்கவும்
5. $\left(\frac{\sum X^2}{N}\right)$ இன் வர்க்க மூலம் திட்ட விலக்கமாகும். ஆகவே

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum \boldsymbol{X^2}}{\boldsymbol{N}}} \qquad \text{அல்லது} \qquad \sqrt{\frac{\sum(\boldsymbol{X}-\bar{\boldsymbol{X}})^2}{\boldsymbol{N}}}$$

(ஆ) ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுதல்

கூட்டுச்சராசரி பின்ன எண்ணாக இருக்கும் போது இந்த முறையை பயன்படுத்தலாம். பின்ன மதிப்பிலிருந்து விலக்கங்களைப் பெறுவது கடினமான வேலையாகும். நேரத்தையும், உழைப்பையும் மிச்சப்படுத்த சுருக்கு முறையான ஊகச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை பெறும் முறையை பயன்படுத்தலாம்.

அதற்கான சூத்திரம் $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum \boldsymbol{d^2}}{\boldsymbol{N}} - \left(\frac{\sum \boldsymbol{d}}{\boldsymbol{N}}\right)^2}$

இங்கு d என்பது ஊக சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்கள் (X – A) ஆகும்.

படிகள்

1. தொடரில் ஏதாவது ஒரு உறுப்பை சராசரியாக ஊகம் செய்க (A)

2. அந்த ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை பெறுக. அதாவது, X-A அதை d என்று
3. குறிப்பிடுக மற்றும் அதன் மொத்தத்தை காண்க $\sum d$
4. விலக்கங்களின் வர்க்கத்தை காண்க. அதாவது d^2 மற்றும் அதன் மொத்தம் Σd^2 ஐ காண்க.
5. பிறகு இந்த மதிப்புகளை கீழ்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 9

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுக.

14, 22, 9, 15, 20, 17, 12,11

தீர்வு

உண்மையான சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள்

மதிப்புகள் (X)	**X - X**	**(X-X)^2**
14	-1	1
22	7	49
9	-6	36
15	0	0
20	5	25
17	2	4
12	-3	9
11	-4	16
N=120		**$\sum$(X-X)^2=140**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{140}{8}}$$

$\sigma = \sqrt{17.5}$

$\sigma = 4.18$

எடுத்துக்காட்டு 10

10 மாணவர்களின் புள்ளியியல் மதிப்பெண்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுக.

மாணவர்கள்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்கள்	43	48	65	57	31	60	37	48	78	59

தீர்வு

மாணவர்கள்	**மதிப்பெண்கள் (x)**	**d=X-A (A=57)**	$\mathbf{d^2}$
1	43	-14	196
2	48	-9	81
3	65	8	64
4	**57**	0	0
5	31	-26	676
6	60	3	9
7	37	-20	400
8	48	-9	81
9	78	21	441
10	59	2	4
N= 10		$\sum$**d = 44**	$\sum \mathbf{d^2}$ **= 1952**

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1952}{10} - \left(\frac{44}{10}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{195.2 - 19.36}$$

$$\sigma = \sqrt{175.84}$$

$$\sigma = 13.26$$

திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுதல் - தொடர்ச்சியற்ற தொகுதி

அ) உண்மையான சராசரி முறை

ஆ) ஊக சராசரி முறை

இ) படி - விலக்க முறை

(அ) உண்மையான சராசரி முறை

படிகள்

1. தொடரின் சராசரியை காண்க.
2. சராசரியிலிருந்து எல்லா மதிப்புகளுக்கும் விலக்கங்களை காண்க. அதாவது $x - \bar{X} = d$.
3. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை $(= d^2)$ கண்டுபிடித்து, உரிய அலைவெண்களால் (f)பெருக்கினால் fd^2 ஐ பெறலாம்.
4. அதன் மொத்தத்தை (Σfd^2) அடைந்து, பின் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துக

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$$

உண்மையான சராசரி பின்னத்தில் இருந்தால், கணக்கிடுதல் அதிக நேரத்தையும், உழைப்பையும் செலவு செய்ய வேண்டி உள்ளது. ஆகவே இந்த முறை எல்லா நேரத்திலும் பயன்படாது.

(ஆ) ஊக சராசரி முறை

இங்கு விலக்கங்கள் உண்மையான சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படாமல் ஊக சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது. மேலும் இந்த மாறியின் மதிப்புகள் சமமான இடைவெளியில் அமையாத நேரத்தில் பயன்படுத்தப்படும்.

படிகள்

1. தொடரில் ஏதாவது ஒரு உறுப்பை ஊக சராசரியாக ஊகம் செய்து அதை A என்று குறிப்பிடுக.

2. அந்த ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களை காண்க. அதாவது X – A அதை d என்று குறிப்பிடுக.
3. இந்த விலக்கங்களை அதற்கு உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி, Σfd பெறுக.
4. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை காண்க $(d)^2$.
5. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை $(d)^2$ உரிய அலைவெண்களால் (f) பெருக்கி, Σfd^2 பெறுக.
6. அந்த மதிப்புகளை கீழ்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிடுக

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum \mathbf{fd}^2}{\sum \mathbf{f}} - \left(\frac{\sum \mathbf{fd}}{\sum \mathbf{f}}\right)^2}$$

இங்கு d = X – A, N = Σf.

எடுத்துக்காட்டு 11

கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

X	20	22	25	31	35	40	42	45
f	5	12	15	20	25	14	10	6

தீர்வு

ஊக சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள்.

X	F	d = x –A (A = 31)	d^2	fd	fd^2
20	5	-11	121	-55	605
22	12	-9	81	-108	972
25	15	-6	36	-90	540
31	20	0	0	0	0
35	25	4	16	100	400
40	14	9	81	126	1134
42	10	11	121	110	1210
45	6	14	196	84	1176
	N = 107			**∑fd= 167**	**$\sum fd^2$ = 6037**

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^{\mathbf{2}}}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{6037}{107} - \left(\frac{167}{107}\right)^{\mathbf{2}}}$$

$$\sigma = \sqrt{56.42 - 2.44}$$

$$\sigma = \sqrt{53.98}$$

$$\sigma = 7.35$$

(இ) படி-விலக்க முறை

மாறியின் மதிப்புகள் சம இடைவெளியில் அமையும் இருந்தால், இந்த முறையை பயன்படுத்தலாம்.

படிகள்

1. தொடரின் மைய மதிப்பை ஊக சராசரியாக ஊகம் செய் A.
2. $d' = \frac{X-A}{C}$ ஐ கண்டுபிடி. இங்கு C என்பது மதிப்புகளின் இடையே உள்ள இடைவெளி
3. இந்த விலக்கங்கள் d' ஐ உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி $\Sigma fd'$ அடைக.
4. விலக்கங்களின் வர்க்கங்கள் d'^2 ஐ காண்க.
5. இந்த விலக்க வர்க்கங்கள் (d'^2) ஐ உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி $\Sigma fd'^2$ பெறுக

இந்த மதிப்புகளை கீழ்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டு, திட்ட விலக்கத்தை பெறுக.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^{\mathbf{2}}} \times \boldsymbol{C}$$

எடுத்துக்காட்டு 12

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு திட்ட விலக்கம் கணக்கிடுக.

மதிப்பெண்கள்	10	20	30	40	50	60
மாணவர்கள் எண்ணிக்கை	8	12	20	10	7	3

தீர்வு

Marks x	F	$d' = \frac{X - A}{C}$	fd'	fd'^{2}
10	8	-2	-16	32
20	12	-1	-12	12
30	20	0	0	0
40	10	1	10	10
50	7	2	14	28
60	3	3	9	27
	N = 60		**$\sum$fd' = 5**	**$\sum$fd'^{2} = 109**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^2} \times C$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{109}{60} - \left(\frac{5}{60}\right)^2} \times 10$$

$$\sigma = \sqrt{1.817 - 0.0069} \times 10$$

$$\sigma = \sqrt{1.8101} \times 10$$

$$\sigma = 1.345 \times 10$$

$$\sigma = 13.45$$

திட்டவிலக்கம் கண்டுபிடித்தல் - தொடர் தொகுதி

தொடர் தொகுதியில் திட்ட விலக்கம் கண்டுபிடித்தல் என்பது, தொடர்ச்சியற்ற தொகுதியில் காணும் முறையை ஒத்ததாகும். ஆனால் தொடர் தொகுதியில், பிரிவுகளின் மையப் புள்ளிகளைக் காண வேண்டும். படி-விலக்க முறை பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அதற்கான சூத்திரம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^2} \times C$$

$d' = \frac{X-A}{C}$,

C – பிரிவு இடைவெளி.

படிகள்

1. ஒவ்வொரு பிரிவின் மைய புள்ளியையும் காண்க.
2. நடு மதிப்பை ஊக சராசரியாக ஊகம் செய்து அதை A என்று குறிப்பிடுக.
3. $d' = \frac{X-A}{C}$, ஐ காண்க.
4. விலக்கங்கள் d' ஐ, உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி, $\Sigma fd'$ ஐ அடைக.
5. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் காண்க d'^2.
6. விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை (d'^2) உரிய அலைவெண்களால் பெருக்கி, $\Sigma fd'^2$ ஐ அடைக
7. இந்த மதிப்புகளை, கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தில் பிரதியிட்டு, திட்டவிலக்கத்தை அடைக

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^2} \times C$$

எடுத்துக்காட்டு 13

ஒரு நகரில் ஒரு ஆண்டின் தினசரி தட்பவெப்பம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தட்பவெப்பம் C^0	நாட்களின் எண்ணிக்கை
– 40 to – 30	10
– 30 to – 20	18
– 20 to – 10	30
– 10 to 0	42
0 to 10	65
10 to 20	180
20 to 30	20
	365

திட்ட விலக்கத்தை காண்க.

தீர்வு

தட்பவெப்பம்	Mid value (m)	நாட்களின் எண்ணிக்கை f	$d' = \frac{X-A}{C}$	fd'	fd'^2
- 40 to - 30	-35	10	-3	-30	90
-30 to - 20	-25	18	-2	-36	72
-20 to -10	-15	30	-1	-30	30
-10 to -0	-5	42	0	0	0
0 to 10	5	65	1	65	65
10 to 20	15	180	2	360	720
20 to 30	25	20	3	60	180
		N = 365		$\sum fd' = 389$	$\sum fd'^2 = 1157$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd'}{\sum f}\right)^2} \times C$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1157}{365} - \left(\frac{389}{365}\right)^2} \times 10$$

$$\sigma = \sqrt{3.1699 - 1.1358} \times 10$$

$$\sigma = \sqrt{2.0341} \times 10$$

$$\sigma = 1.4262 \times 10$$

$$\sigma = 14.262$$

திட்ட விலக்கத்தின் சிறப்பியல்புகள் மற்றும் குறைபாடுகள்

சிறப்பியல்புகள்

1. இது தீர்மானமாக வரையறுக்கப்பட்டது. மேலும் இதன் மதிப்பு உறுதியானது, மேலும் இது எல்லா மதிப்புகளையும் சார்ந்தது. இங்கு விலக்கங்களின் உண்மையான குறிகள் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன.
2. இது கூட்டுச்சராசரியை சார்ந்தது. அதனால் கூட்டுச் சராசரியின் எல்லா சிறப்பியல்புகளும் இதற்கும் உண்டு.
3. சிதறல் அளவைகளில் இது மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததும், பெரும்பாலும் பயன்படுத்துவதும் ஆகும்.

4. மேலும் கணக்கியல் விரிவாக்கத்திற்கு உகந்தது.
5. மாதிரிக்கூறு ஏற்றத் தாழ்வுகளால், குறைந்த அளவு பாதிக்கப்படுவதால், இது நிலைத் தன்மையுடையது.
6. ஒட்டுறவுக் கெழுவை அளவிடுவதற்கும் மற்றும் மாதிரி முறைக்கும் இது அடித்தளமாகும்.

குறைபாடுகள்

1. இது புரிந்து கொள்வதற்கு எளிதானதல்ல. மேலும் இது கணக்கிடுவதற்கு கடினமானது.
2. இது மிகை மதிப்புகளுக்கு அதிக நிறையைத் தருகின்றது. ஏனென்றால் மதிப்புகள் வர்க்கமாக்கப்படுகின்றன.
3. இது தனித்த சிதறல் அளவையாதலால், ஒப்பிடுதலுக்கு இது பயன்படாது.

மாறுபாட்டுக் கெழு

திட்டவிலக்கம் ஒரு தனித்த சிதறல் அளவை. இது, சேகரிக்கப்பட்ட விவர மதிப்புகளின் அலகுகளாலேயே அழைக்கப்படுகிறது. மாணவர்களின் எடைகளின் திட்ட விலக்கத்துடன் மாணவர்களின் உயரங்களின் திட்ட விலக்கத்தை ஒப்பிட முடியாது. ஏனென்றால் இரண்டுமே வெவ்வேறு அலகுகளால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. அதாவது உயரங்கள் செ.மீட்டரிலும், எடைகள் கிலோ கிராமிலும் குறிக்கப்படுகின்றன. ஒப்பிடும் நோக்கத்திற்காக, திட்ட விலக்கத்தை ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவையாக மாற்ற வேண்டும். இந்த ஒப்பீட்டு சிதறல் அளவை மாறுபாட்டுக் கெழு என அறியப்படுகிறது.

திட்ட விலக்கத்தை, கூட்டுச் சராசரியில் வகுத்து, 100 ஆல் பெருக்கி மாறுபாட்டுக் கெழு பெறப்படுகிறது.

குறியீட்டில், மாறுபாட்டுக் கெழு $(\mathrm{C.V.}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{X} \times 100$

இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட தொடர்களின் மாறுபாடுகளை ஒப்பிட, மாறுபாட்டுக் கெழுவைப் பயன்படுத்தலாம். விவரங்களின் தொடர்கள் அல்லது குழுக்கள் இவற்றில் எதன் மாறுபாட்டுக் கெழு அதிகமாக உள்ளதோ, அந்த குழு, அதிக மாறுபாடு, குறைந்த நிலைத் தன்மை, குறைந்த சீரான்மை, குறைந்த மாறாத்தன்மை, குறைந்த ஒருபடித் தன்மை உடையது என்றும், மாறுபாட்டுக் கெழு குறைந்து உள்ள குழு, குறைந்த மாறுபாடு, அதிக நிலைத்தன்மை, அதிக சீரான்மை, அதிக மாறாத்தன்மை, அதிக ஒருபடித்தன்மை உடையது என்றும் கூறலாம்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. கால்மான விலக்கம் பற்றி கூறுக
2. சராசரி விலக்கம் பற்றி குறிப்பு வரைக
3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு, கால்மான விலக்கம் மற்றும் கால்மான விலக்கக் கெழு காண்க.

மதிப்பெண்கள்	10	20	30	40	50	60	70	80
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	8	10	20	12	9	7	5

(Q.D=15, Coefficient of Q.D=0.333)

4. பின்வரும் பரவலின் கால்மக் கோட்டக் கெழுவை கணக்கிடுக.

கூலி	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
வேலையாட்கள்	2	14	24	30	15

(Q.D=3.934)

5. பின்வரும் விவரங்களுக்கு கூட்டு சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காண்க

மையப்புள்ளி	:	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5
அலைவெண்	:	5	6	15	10	5	4	3	2

(Mean =21.3 and S.D=8.975)

6. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு சராசரி விலக்கத்தை, மேலும் சராசரி விலக்கக் கெழுக்களையும் காண்க.

மதிப்பெண்கள்	22-25	25-28	28-31	31-34	34-37	37-40
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	8	12	3	2	1

(Median=28.75, M.D=2.75, Coefficient of M.D=0.196)

7. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு சராசரி விலக்கத்தை, இடைநிலையிலிருந்து கணக்கிடு.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	1	3	8	2	2

(Median=25, M.D=6.875, Coefficient of M.D=0.275)

8. கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுக.

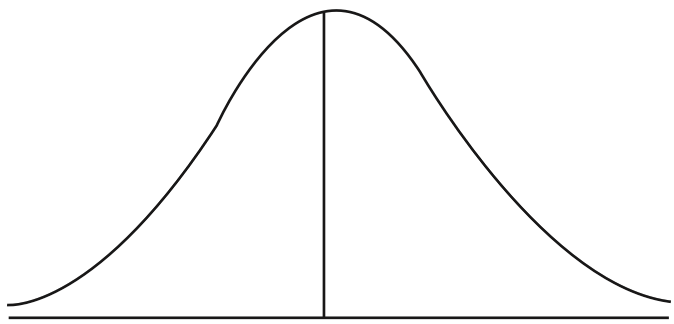
14, 22, 9, 15, 20,17,12,11

(S.D=4.18)

கோட்டம் (SKEWNESS)

பொருள் :

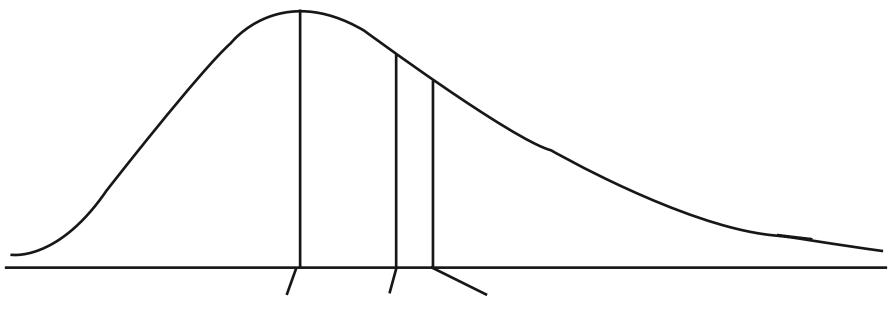
கோட்டம் என்றால் சமச்சீரின்மை என்று பொருள்படும். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் உதவியுடன் வரையப்படும் வளைவரையின் வடிவத்தைப் பற்றி தெரிந்துக் கொள்ள கோட்டம் பற்றி நாம் அறிந்து கொள்ள வேண்டும். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பரவலில், கூட்டுச் சராசரி = இடைநிலை = முகடு, என்ற நிலையில் இருக்குமானால் அந்த பரவல் சமச்சீர் பரவலாகும். ஒரு பரவலில் கூட்டுச் சராசரி ≠ இடைநிலை ≠ முகடு, என்றால் அது சமச்சீர் அற்ற பரவல் எனப்படும். மேலும் அது கோட்டமுடைய பரவல் என்று அழைக்கப்படும். அத்தகைய பரவல், நேரிடை கோட்டப் பரவல் அல்லது எதிரிடை கோட்டப் பரவலாக இருக்கும்.



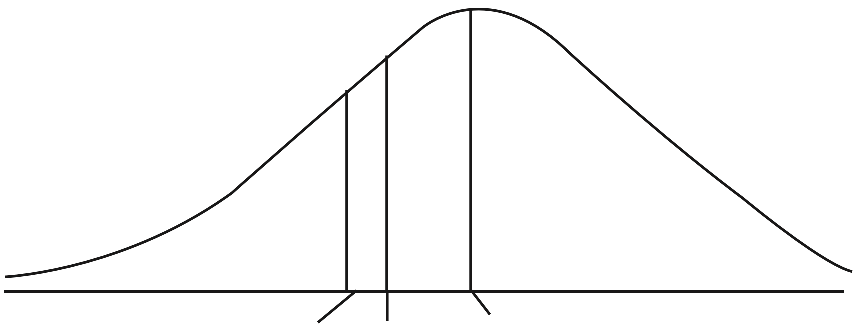
கூட்டுச்சராசரி = இடைநிலை = முகடு

மேற்கண்ட படத்தின் மூலம், சமச்சீர் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் ஒரே புள்ளியில் பொருந்தியிருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. வளைவரையின் நடுப்புள்ளியின் இரு புறமும் மதிப்புகள் சமமாகப் பரவியிருக்கும்.

(ஆ) நேரிடை கோட்டப் பரவல்



மேற்கண்ட படத்தின் மூலம் கோட்டப் பரவலில், கூட்டுச்சராசரி உச்ச மதிப்பையும் மற்றும் முகடு குறைந்த மதிப்பை பெற்றும், இவை இரண்டிற்கிடையே இடைநிலை அமைந்தும் இருக்கும், என்பது தெளிவாகிறது. நேரிடைக் கோட்டப் பரவலில் மதிப்புகள் அதிக அளவில் இடது புறத்தை விட வலது புறத்தில் பரவி இருக்கும்.



மேற்கண்ட படத்தின் மூலம், எதிரிடை கோட்டப் பரவலில், முகடு உச்ச மதிப்பையும், கூட்டு சராசரி குறைந்த மதிப்பை பெற்றும், இவை இரண்டிற்கிடையே இடைநிலை அமைந்தும் இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. எதிரிடை கோட்டப் பரவலில், மதிப்புகள் அதிக அளவில் வலது புறத்தை விட, இடது புறத்தில் பரவி இருக்கும்.

கோட்ட அளவைகள் :

முக்கியமான கோட்ட அளவைகளாவன:

(i) கார்ல் - பியர்சனின் கோட்டக்கெழு.

(ii) பௌலியின் கோட்டக் கெழு.

(iii) விலக்கப் பெருக்குத் தொகையைச் சார்ந்த கோட்ட அளவை.

கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழு :

கார்ல்-பியர்சனின் கூற்றுப்படி, கோட்ட அளவை - கூட்டுச்சராசரி முகடு. இந்த அளவை, இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பரவல்களைச் சிறந்த முறையில் ஒப்பிட ஏற்றதல்ல, ஏனென்றால் வெவ்வேறு தொடர்களுக்கு வெவ்வேறு அலகுகள் இருக்கும். இந்த இடர்பாட்டை தவிர்ப்பதற்காக ஒப்பீட்டு கோட்ட அளவையான கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\textbf{கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக்கெழு} = \frac{\textbf{கூட்டுச் சராசரி} - \textbf{முகடு}}{\textbf{திட்டவிலக்கம்}}$$

முகடு தீர்மானமாக வரையறுக்கப் படாத இடத்தில், இந்த கெழு கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது.

$$\textbf{கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழு} = \frac{\textbf{3 (கூட்டுச் சராசரி - இடைநிலை)}}{\textbf{திட்டவிலக்கம்}}$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை கணக்கிடுக.

25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, 20

தீர்வு :

சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் காணல்.

சுருக்க முறை:

அளவு X	A = 25 **யிலிருந்து விலக்கங்கள்**	d^2
25	0	0
15	-10	100
23	-2	4
40	15	225
27	2	4
25	0	0
23	-2	4
25	0	0
20	-5	25
N = 9	$\sum d = -2$	$\sum d^2 = 362$

கூட்டுச்சராசரி $x = A \pm \frac{\sum d}{n}$

$=25 - \frac{2}{9}$

$=25 - 0.22$

$=24.78$

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{362}{9} - \left(\frac{-2}{9}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{40.22 - 0.05}$$

$$\sigma = \sqrt{40.17}$$

$$\sigma = 6.3$$

முகடு = 25, ஏனென்றால் இந்த அளவு 3 முறை திரும்ப திரும்ப வந்துள்ளது.

கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக்கெழு = $\frac{\text{கூட்டுச் சராசரி – முகடு}}{\text{திட்டவிலக்கம்}}$

$= \frac{24.78 - 25}{6.3}$

$= \frac{-0.22}{6.3}$

$=-0.03$

எடுத்துக்காட்டு 2:

கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு கோட்டக்கெழுவை காண்க.

அளவு	: 3	4	5	6	7	8	9	10
அலைவெண்	: 7	10	14	35	102	136	43	8

தீர்வு :

அளவு	அலைவெண் (f)	d=X-A d=X-6	d^2	fd	fd^2
3	7	-3	9	-21	63
4	10	-2	4	-20	40
5	14	-1	1	-14	14
6	35	0	0	0	0
7	102	1	1	102	102
8	136	2	4	272	544
9	43	3	9	129	387
10	8	4	16	32	128
	N = 355			**∑fd = 480**	**$\sum fd^2$ = 1278**

$\bar{X} = 6 + \frac{480}{355}$

$\bar{X}$ = 6+1.35

$\bar{X}$ = 7.35

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1278}{355} - \left(\frac{480}{355}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{3.6 - 1.82}$$

$$\sigma = \sqrt{1.78}$$

$$\sigma = 1.33$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பரவலுக்கு கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை காண்க.

X :	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
F :	2	5	7	13	21	16	8	3

தீர்வு :

20-25 என்ற பிரிவு உச்ச அலைவெண்ணை பெற்றிருப்பதால், முகடு இந்த பிரிவில் அமையும்.

முகடு= $\boldsymbol{l} + \frac{\Delta_{\mathbf{1}}}{\Delta_{\mathbf{1}} + \Delta_{\mathbf{2}}} \times \boldsymbol{c}$

$l = 20$,

$f_1 = 21$,

$f_0 = 13$,

$f_2 = 16$,

$C = 5$

$M_0 = 20 + \frac{8}{8+5} \times 5$

$M_0 = 20 + \frac{8 \times 5}{8+5}$

$M_{0=}\ 20 + \frac{40}{13}$

$M_{0=}\ 20 + 3.076$

$M_{0=}\ 23.08$

சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காணல் :

X	மைய புள்ளிகள் M	அலை வெண் f	விலக்கங்கள் $d' = \frac{M - 22.5}{5}$	fd'	d'^2	fd'^2
0-5	2.5	2	-4	-8	16	32
5-10	7.5	5	-3	-15	9	45
10-15	12.5	7	-2	-14	4	28
15-20	17.5	13	-1	-13	1	13
20-25	**22.5**	21	0	0	0	0
25-30	27.5	16	1	16	1	16
30-35	32.5	8	2	16	4	32
35-40	37.5	3	3	9	9	27
		N = 75		**$\sum fd' = -9$**		**$\sum fd'^2 = 193$**

$\bar{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A} \pm \frac{\sum \mathbf{fd}'}{\boldsymbol{N}} \times \boldsymbol{c}$

$\bar{X} = 22.5 - \frac{9}{75} \times 5$

$\bar{X} = 22.5 - \frac{45}{75}$

$\bar{X} = 22.5 - 0.6$

$\bar{X} = 21.9$

$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum \mathbf{fd}'^{2}}{\sum \mathbf{f}} - \left(\frac{\sum \mathbf{fd}'}{\sum \mathbf{f}}\right)^{2}} \times \boldsymbol{C}$

$\sigma = \sqrt{\frac{193}{75} - \left(\frac{-9}{75}\right)^{2}} \times 5$

$\sigma = \sqrt{2.75 - 0.0144} \times 5$

$\sigma = \sqrt{2.5556} \times 5$

$\sigma = 1.5986 \times 5$

$\sigma = 7.99$

$$\textbf{கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக்கெழு} = \frac{\textbf{கூட்டுச் சராசரி - முகடு}}{\textbf{திட்டவிலக்கம்}}$$

$$\text{கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக்கெழு} = \frac{21.9-23.08}{7.99}$$

$$\text{கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக்கெழு} = \frac{-1.18}{7.99} = -0.1477$$

பௌலியின் கோட்டக் கெழு :

கார்ல்-பியர்சனின் கோட்டக் கெழுவை அளக்க, தொடரின் மொத்த மதிப்புகளும் தேவை. பேராசிரியர். பௌலி, கால்மானங்களைச் சார்ந்த ஒரு சூத்திரத்தைக் கூறுகிறார். சமச்சீர் பரவலில் கால்மானங்கள் இடைநிலையிலிருந்து சம தூரத்தில் அமைந்துள்ளன.

அதாவது, இடைநிலை - Q_1 = Q_3 - இடைநிலை, ஆனால் கோட்டப் பரவலில், கால்மானங்கள் இடைநிலையிலிருந்து சமதூரத்தில் இருப்பதில்லை. எனவே பௌலி கூறும் சூத்திரம் :

$$\text{பௌலியின் கோட்டக் கெழு (sk)} = \frac{\mathbf{Q_3+Q_1-2\ median}}{\mathbf{Q_3-Q_1}}$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

கீடிநக்கண்ட தொடருக்கு பௌலியின் கோட்டக்கெழுவைக் காண்க.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விவரங்கள் ஏறு வரிசையில் உள்ளன.

2, 4, 6, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{11+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= \left(\frac{12}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$= 3$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

= **6**

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

$=3\left(\frac{12}{4}\right)$ ஆவது உறுப்பின் அளவு

= **9** ஆவது உறுப்பின் அளவு

= **18**

இடைநிலை = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை = $\left(\frac{11+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை = $\left(\frac{12}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை = 6 ஆவது உறுப்பு

இடைநிலை =12

பௌலியின் கோட்டக் கெழு (sk) $= \frac{\mathbf{Q_3+Q_1-2\ median}}{\mathbf{Q_3-Q_1}}$

பௌலியின் கோட்டக் கெழு (sk) $=\frac{18+6-2(12)}{18-6}$

பௌலியின் கோட்டக் கெழு (sk) $=\frac{24-24}{12}$

பௌலியின் கோட்டக் கெழு (sk) $=\frac{0}{12}$

கோட்டக் கெழு $=0$ என்பதால், கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடர் சமச்சீர் தொடராகும்.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் கோட்டம் என்பதன் விளக்குக
2. பல்வேறு கோட்ட அளவுகளை தெளிவாக விளக்குக
3. கீழ்க்காணும் விபரங்களிலிருந்து கார்ல் பியர்சனின் கோட்ட அளவுக் கெழுவினைக் கண்டுபிடி

கூலி ரூ.	10	11	12	13	14	15
எண்ணிக்கை	2	4	10	8	5	1

(Skewness=0.36)

4. கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து கார்ல் பியர்சனின் கோட்ட அளவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக

அளவு	:	9	10	11	12	13	14	15
எண்ணிக்கை	:	6	3	4	10	8	2	3

(Skewness=0.110)

5. கீழ்க்காணும் விபரங்களிலிருந்து கார்ல் பியர்சனின் கோட்ட அளவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக

ஓர் இனத்தின் கூலி ரூ.	:	12	15	20	25	30	40	50
இனத்தின் எண்ணிக்கை	:	10	25	40	70	32	13	10

(Skewness=0.014)

6. கீழ்க்காணும் விவரங்களிலிருந்து கார்ல் பியர்சனின் கோட்ட அளவுக் கெழுவினைக் கணக்கிடுக

கூலி ரூ.	:	6	7	8	9	10	11	12
எண்ணிக்கை	:	3	6	9	13	8	5	4

(Skewness=0)

அறிமுகம்

பாமர மனிதனால், ஒட்டுறவு என்ற சொல் அவன் அறியாமலேயே பயன்படுத்தப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக பெற்றோர்கள் தங்கள் குழந்தைகளிடம், கடினமாக உழைத்தால் தான் நல்ல மதிப்பெண் பெற முடியும் என்று கூறுமிடத்து, கடின உழைப்பையும் நல்ல மதிப்பெண்களையும் தொடர்புபடுத்துகின்றனர்.

உயரம், எடை, வயது, மதிப்பெண்கள், தினக்கூலி போன்ற ஒரு மாறிப் பண்புகளைப் பற்றி மட்டுமே ஆய்வு செய்வது, ஒரு மாறிப் பகுப்பாய்வு எனப்படும். இரு மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பினைப் பற்றிய புள்ளியியல் ஆய்வு இருமாறி பகுப்பாய்வு எனப்படும். சில சமயங்களில் மாறிகள் ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையன.

உடல் நல அறிவியலில், இரத்த அழுத்தம் மற்றும் வயது, சத்துணவு மற்றும் எடைக் கூடுதல், மொத்த வருமானம் மற்றும் மருத்துவ செலவு ஆகியன ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையன என அறியலாம். இவற்றிற்கிடையேயான தொடர்புகள் அவற்றின் பண்புகள், தாக்கம் ஆகியவை பற்றி ஒட்டுறவு மற்றும் உடன் தொடர்பு பகுப்பாய்வு மூலம் ஆராயலாம்.

ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினைக் குறிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக தந்தை, மகளின் உயரம், மழையளவு மற்றும் விளைச்சல், ஊதியம் மற்றும் விலைக் குறியீடு, பங்கு மற்றும் கடன் பத்திரங்கள் ஆகியன ஒன்றுடன் ஒன்று தொடர்புடையன.

ஒட்டுறவு ஒரு புள்ளியியல் பகுப்பாய்வு இது இரு மாறிகள் எந்த அளவிற்கு ஒன்றை ஒன்று பாதிக்கின்றன என்பதை அளக்க கூடியது. இரு மாறிகளுக்கிடையேயான ""தொடர்பு"" என்ற வார்த்தை இங்கு முக்கியமானது. இது இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள உறவினைக் குறிக்கின்றது. ஒட்டுறவு என்பது காரண விளைவுத் தொடர்பைக் குறிக்காது. விலை-அளிப்பு, வரவு-செலவு என்பன தொடர்புடையன.

வரையறைகள்

ஒட்டுறவு பகுப்பாய்வு என்பது இருமாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பின் அளவை அளவிடும் முயற்சி ஆகும். - யா - குன் - செள (Ya - Kun - Chou)

‘ஒட்டுறவு என்பது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயான உடன் மாறுபாட்டளவையின் பகுப்பாய்வு ஆகும்.’ ஏ. எம். டட்டில் (A.M. Tuttle)

இருமாறி கணங்கள், எவ்வாறு ஒன்றை ஒன்று சார்ந்துள்ளன என்பதை விளக்குகிறது. ஒரு மாறியானது சாராத மாறி எனவும், மற்றொன்று அதைச் சார்ந்த மாறி எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. சார்ந்த மாறியின் மதிப்பு, சாராத மாறியின் மூலம் அளவிடப்படுகிறது.

ஒட்டுறவின் பயன்கள்

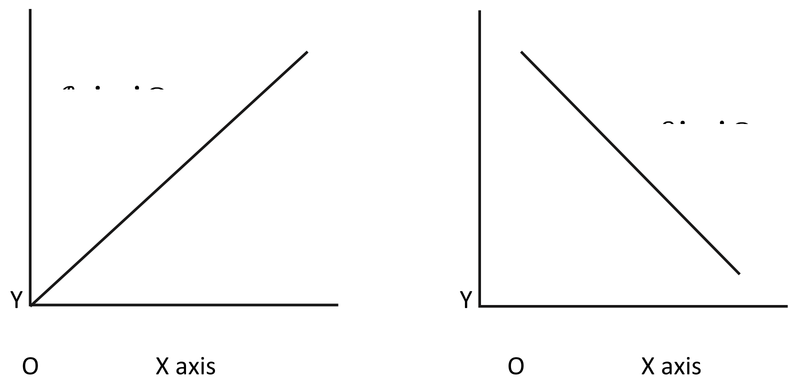
1. இது உடலறிவியல் மற்றும் சமூக அறிவியலில் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.
2. பொறியியல் வல்லுநர்களுக்கு, விலை, அளவு போன்ற மாறிகளுக்கிடையிலான தொடர்பு அறிய உதவுகிறது. வியாபாரிகள், ஒட்டுறவைப் பயன்படுத்தி, செலவு, விற்பனை, விலைபோன்றவற்றை மதிப்பிடுகின்றனர்.
3. தொடர்பின் அளவை அளவிடப் பயன்படுகிறது.
4. கூறு பிழையைக் கணக்கிட இயலும்.
5. 'உடன் தொடர்பு' என்ற சொல்லுக்கு அடிப்படையாக விளங்குகிறது.

சிதறல் விளக்கப் படம்

இது, இரு மாறிகளுக்கிடையிலான தொடர்பைப் படங்கள் மூலம் அறிய உதவும் எளிய முறையாகும். ஒரு மாறி கிடைக்கோட்டிலும், இரண்டாவது மாறி அதற்கு குத்துக் கோட்டிலும் குறிக்கப் படுகிறது. ஒவ்வொரு மாறிச் சோடிகளையும் புள்ளிகளாகத் தளத்தில் குறிக்க வேண்டும். கண்டறியப்பட்ட இரு மாறிச் சோடிகளுக்கான, பல புள்ளிகள் தளத்தில் குறிக்கப்படுகின்றன. இப்புள்ளிகளின் சிதறல் அல்லது ஒருங்கமைவு புள்ளிகளின் திசைைக் காட்டுவதாக அமையும்.

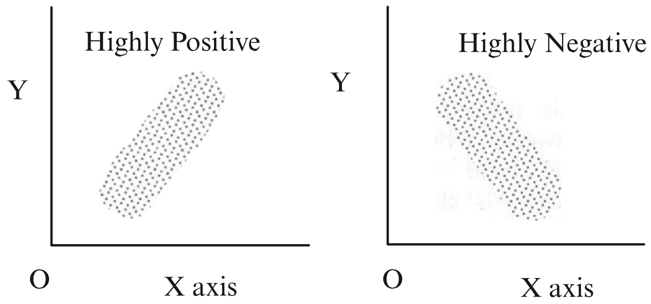
I. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும்

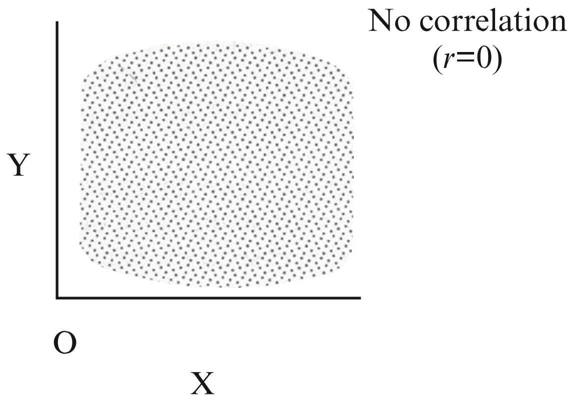
1. கீழ் இடது முனையிலிருந்து, மேல் வலது முனை வரையிலும் ஒரு நேர்கோட்டை அமைக்குமானால், அங்கு முழுமையாக "நேர் ஒட்டுறவு" உள்ளது எனலாம். இங்கு r = +1
2. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் இடது மேல் முனையில் இருந்து, வலது கீழ் முனை வரை ஒரு நேர்க்கோட்டை அமைக்குமானால் அங்கு இரு மாறிகளுக்கிடையில் முழுமையான எதிர் ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம். இங்கு, ஒட்டுறவுக் கெழு r = -1.



II.

1. தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் இடது கீழ் முனையில் இருந்து, வலது மேல் முனைக்கு உயருகின்ற பட்டை வடிவத்தைப் பெற்றிருக்குமானால், தொடர்புடைய இரு மாறிகளும் மிக அதிக நேர் ஒட்டுறவு உடையது எனலாம்.
2. தளத்தில் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் குறுகிய பட்டை வடிவத்தில் இடது மேல் முனையிலிருந்து வலது கீழ் முனைக்கு இறங்குமானால் இரு மாறிகளும், மிக அதிக அளவில் எதிர் ஒட்டுறவு உடையது எனலாம்.
3. குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் அனைத்தும் படம் முழுவதிலும் சிதறி இருக்குமானால் அம்மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு இல்லை எனலாம். இங்கு r = 0.





நிறைகள்

1. இரு மாறிகளுக்கிடையிலான ஒட்டுறவைக் காண்பதில் இம்முறை மிக எளிமையாகவும், கவன ஈர்ப்பு உடையதாகவும் அமைகிறது.
2. ஒட்டுறவு பற்றி அறிய உதவும் கணக்கியலல்லாத முறையாகும். இது எளிதில் புரிந்து கொள்ளக் கூடியது.
3. முனை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.
4. இரு மாறிகளுக்கிடையேயான தொடர்பைக் காண்பதில், இது முதல் படியாகும்.
5. பார்த்த மாத்திரத்திலேயே இது நேர் ஒட்டுறவா, அல்லது எதிர் ஒட்டுறவா என அறிய இயலும்.

குறைகள்

இம்முறையில் இரு மாறிகளுக்கிடையிலான சரியான அளவு ஒட்டுறவைக் காண இயலாது.

ஒட்டுறவின் வகைகள்

ஒட்டுறவு பல வகைகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. அவற்றில் முக்கியமானவை.

1. நேர் மற்றும் எதிர் ஒட்டுறவு
2. நேர்க்கோடு மற்றும் வளைக்கோட்டு உறவுகள்
3. பகுதி மற்றும் முழுமை ஒட்டுறவு
4. சாதாரண மற்றும் பல்சார் ஒட்டுறவு

நேர் மற்றும் எதிர் ஒட்டுறவு

இது இரு மாறிகளின் மாற்றங்கள் செல்லும் திசையைப் பொறுத்தது. இரு மாறிகளும் ஒன்றாக ஒரே திசையில் நகருமானால் அதாவது ஒரு மாறியின் அதிகரிப்பு, மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை அதிகரிக்கச் செய்வதால், அல்லது ஒரு மாறி மதிப்பின் குறையும் தன்மை மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் குறையச் செய்யுமானால், அவ்வொட்டுறவு மிகை அல்லது நேர் ஒட்டுறவு என்று அழைக்கப்படும். விலை-அளிப்பு, உயரம்-எடை மழை அளவு-விளைச்சல் என்பன நேர் ஒட்டுறவுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

இரு மாறிகளும் ஒன்றாக எதிர்திசையில் செல்லுமானால், அதாவது ஒரு மாறி மதிப்பு அதிகரிப்பதால், மற்றொரு மாறியின் மதிப்பு குறையும்பொழுதோ, ஒரு மாறியின் மதிப்புக் குறைவு மற்றொரு மாறி மதிப்பனை அதிகரிக்கச் செய்யும் பொழுதோ, அவ்வொட்டுறவு எதிர் ஒட்டுறவு அல்லது தலைகீழ் ஒட்டுறவு என்று அழைக்கப்படும்

விலை-தேவை, பயிர் விளைச்சல்-விலை என்பன எதிர் ஒட்டுறவுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்.

நேர்க்கோடு மற்றும் வளைகோட்டு ஒட்டுறவுகள்

இரு மாறிகளுக்கிடையிலான மாற்றங்களின் விகிதம் மாறாமல் இருக்குமானால் அவற்றிற்கிடையே நேர்க்கோட்டு ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம். பின்வரும் அட்டவணையைக் கருதுக.

X	2	4	6	8	10	12
Y	3	6	9	12	15	18

இங்கு இரு மாறிகளுக்கிடையிலான விகிதம் மாறாமல் உள்ளது. இப்புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத்தில் குறித்தால் நமக்கு ஒரு நேர்க்கோடு கிடைக்கும்.

ஒரு மாறி மதிப்பில் உள்ள மாற்றங்கள் மற்ற மாறி மதிப்பின் மாற்றங்களிடையே மாறிலி விகிதத்தை ஏற்படுத்தாத பொழுது, அவ்வுறவு வளைகோட்டு உறவு எனப்படும். இதன் வரைபடம் ஒரு வளைவரையாகும்.

பகுதி மற்றும் முழுமை ஒட்டுறவு

மற்ற மாறிகளின் விளைவுகளை நீக்கிவிட்டு, இரு மாறிகளைப் பற்றி மட்டும் ஆய்வு செய்வது பகுதி ஒட்டுறவு எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக விலை-தேவை பற்றி ஆய்வு செய்யும் பொழுது அதற்கு தொடர்பான அளிப்புப் பகுதியின் விளைவை நீக்கிவிடுதல்.

சாதாரண மற்றும் பல்சார் ஒட்டுறவு

இரு மாறிகளுக்கிடையிலான தொடர்பை மற்றும் ஆய்வு செய்வது தனி ஒட்டுறவு ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, பணத்தின் அளவு மற்றும் விலைவாசி, நிலவரம், தேவை மற்றும் விலை இவற்றைப் பற்றி ஆய்வு செய்வதாகும்.

ஆனால் பல்சார் ஒட்டுறவானது, பொருட்களின் விலை மீது தேவை மற்றும் அளிப்பு ஆகியவற்றின் இணைந்த விளைவைப் பற்றியதாகும்.

ஒட்டுறவு கணக்கீடு

இரு மாறிகளுக்கிடையே ஒரு தொடர்பு இருக்குமெனில், அத்தொடர்பின் அளவை அளவிட வேண்டும். அவ்வளவையானது, ஒட்டுறவு அளவை அல்லது ஒட்டுறவுக்கெழு என்று அழைக்கப்படும். இது “r“ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

உடன் மாறுபாட்டளவை

x, y மாறிகளுக்கிடையேயான உடன் மாறுபாட்டளவை Cov (x, y) = $\frac{\sum(X-\bar{X})\,(Y-\bar{Y})}{N}$

இங்கு $\bar{X}$,$\bar{Y}$ என்பன x, y மாறிகளின் சராசரிகள் ’n’ என்பது மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

‘கார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக்கெழு

கார்ல் பியர்ஸன் (Karl Pearson) என்ற உயிர் புள்ளியியல் மற்றும் புள்ளியியல் நிபுணர், இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பை அளப்பதற்கு ஒரு கணிதவியல் முறையைக் கொடுத்துள்ளார். நடைமுறையில் இம்முறை பரவலாகப் பயன்படுத்தப் படுகிறது. மேலும் இம்முறையில் கணக்கிடப்படும் ஒட்டுறவுக் கெழு பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழு என அழைக்கப்படுகிறது. இது பின்வரும் வாய்ப்பாட்டால் கணக்கிடப்படுகிறது.

$r = \frac{C\,OV(x.y)}{\sigma_x.\sigma_y}$ இங்கு σ x, σ y என்பன x, y இன் திட்ட விலக்கங்கள்

$$r = \frac{\sum xy}{n\ \sigma_x\ \ \sigma_y}$$

$$r = \frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2\ .\sum Y^2}} \qquad\qquad X = x - \bar{x}, Y = y - \bar{y}$$

சரியான சராசரி காண இயலும்பொழுது மேற்கண்ட முதல் இரு முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பயன்படுத்தலாம்.மூன்றாவது வாய்ப்பாடு, கணக்கிடுவதற்கு எளிதானது. மேலும் இம்முறையில் x, y வரிசைகளின் திட்ட விலக்கங்கள் காண வேண்டிய அவசியமில்லை.

படிகள்

1. x, y என்ற வரிசைகளின் சராசரி காண வேண்டும்.
2. இரு வரிசைகளின் x, y ல் இருந்து விலகல் எடுக்க வேண்டும்.
3. x, y இவற்றின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் கண்டு, அவ்வர்க்கங்களின் கூடுதலைக் காண்க. அது $\Sigma X^2, \Sigma Y^2$ என்று குறிக்கப்படட்டும்.
4. x, y யில் இருந்து பெறப்படும் விலக்கங்களைப் பெருக்கி அவற்றின் மொத்தம் காண வேண்டும். இது உடன் மாறுபாட்டளவையாகும்.
5. இம் மதிப்புகளை வாய்ப்பாட்டில் பிரதியிடுக.

$$\boldsymbol{r = \frac{C\ OV(x.y)}{\sigma_x.\sigma_y} = \frac{\sum(x-\overline{x})\ \ (y-y)/n}{\sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})}{n}}\ .\ \sqrt{\frac{\sum(y-\overline{y})}{n}}}}$$

மேற்கண்ட வாய்பாடு பின்வருமாறு எளிமையாக்கப்படுகிறது.

$$\boldsymbol{r = \frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2\ .\sum Y^2}}} \qquad\qquad \boldsymbol{X = x - \overline{x},\quad Y = y - \overline{y}}$$

எடுத்துக்காட்டு 1

தந்தை (x) மற்றும் (y) மகன் இவர்களின் உயரங்களுக்கிடையிலான ஷகார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை’ பின்வரும் விவரங்களில் இருந்து கணக்கிடுதல். மேலும் முடிவினைப் பற்றி கருத்து தெரிவிக்க.

X	64	65	66	67	68	69	70
Y	66	67	65	68	70	68	72

தீர்வு

X	Y	$X = x - \bar{x}$ X=x-67	X^2	Y=y-$\bar{y}$ Y=y-68	Y^2	XY
64	66	-3	9	-2	4	6
65	67	-2	4	-1	1	2
66	65	-1	1	-3	9	3
67	68	0	0	0	0	0
68	70	1	1	2	4	2
69	68	2	4	0	0	0
70	72	3	9	4	16	12
∑x=469	**∑y=476**	**0**	**$\sum X^2$=28**	**0**	**$\sum Y^2$=34**	**∑ XY =25**

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{469}{7}$$

$$\bar{x} = 67$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{476}{7}$$

$$\bar{y} = 68$$

$$\boldsymbol{r = \frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2 . \sum Y^2}}}$$

$$r = \frac{25}{\sqrt{28 \times 34}}$$

$$r = \frac{25}{\sqrt{952}}$$

$$r = \frac{25}{30.85} = 0.81$$

r = + 0.81 என்பதிலிருந்து இருமாறிகளும் அதிக நேர் ஒட்டுறவு உடையன. அதாவது உயரமான தந்தை, உயரமான மகனைப் பெற்றிருப்பார்

எடுத்துக்காட்டு 2

தந்தை (x) மற்றும் (y) மகன் இவர்களின் உயரங்களுக்கிடையிலான கார்ல் பியர்ஸனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவை' பின்வரும் விவரங்களில் இருந்து கணக்கிடுதல். மேலும் முடிவினைப் பற்றி கருத்து தெரிவிக்க.

தந்தை (x)	57	42	40	38	42	45	42	44	40	46	44	43
மகன் (y)	10	26	30	41	29	27	27	19	18	19	31	29

ஊக சராசரி முறையில் தந்தை வயது 44 மகன் வயது 26 என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

X	**(X-44) dx**	**dx^2**	**Y**	**(Y-26) dy**	**dy^2**	**Dxdy**
57	13	169	10	-16	256	-208
42	-2	4	26	0	0	0
40	-4	16	30	+4	16	-16
38	-6	36	41	+15	225	-90
42	-2	4	29	+3	9	-6
45	+1	1	27	+1	1	+1
42	-2	4	27	+1	1	-2
44	0	0	19	-7	49	0
40	-4	16	18	-8	64	+32
46	+3	4	19	-7	49	-14
44	0	0	31	+5	25	0
43	-1	1	29	+3	9	-3
N = 12	**$\sum dx = -5$**	**$\sum dx^2 = 255$**		**$\sum dy = -6$**	**$\sum dy^2 = 704$**	**$\sum dxdy = -306$**

$$r = \frac{\sum d_x d_y - \frac{(\sum d_x)(\sum d_y)}{N}}{\sqrt{\sum d_x{}^2 - \frac{(\sum d_x)^2}{N}}\ .\ \sqrt{\sum d_y{}^2 - \frac{(\sum d_y)^2}{N}}}$$

$$r = \frac{-306 - \frac{(-5)(-6)}{12}}{\sqrt{255 - \frac{(-5)^2}{12}}\ .\ \sqrt{704 - \frac{(-6)^2}{12}}}$$

$$r = \frac{-306 - \frac{30}{12}}{\sqrt{255 - \frac{25}{12}}\ .\ \sqrt{704 - \frac{36}{12}}}$$

$$r = \frac{-306 - 2.5}{\sqrt{255 - 2.1}\ .\ \sqrt{704 - 3}}$$

$$r = \frac{-308.5}{\sqrt{252.9}\ \sqrt{701}}$$

$$r = \frac{-308.5}{15.90 \times 26.47}$$

$$r = \frac{-308.5}{420.873}$$

$$r = -0.733$$

ஒட்டுறவுக் கெழுவின் பண்புகள்

1. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு -1 ற்கும் +1 ற்கும் இடையில் அமைகிறது.
2. ஒட்டுறவுக் கெழுவானது ஆதி மாற்றத்தாலோ, அளவு மாற்றத்தாலோ பாதிக்கப்படுவதில்லை.
3. ஒட்டுறவுக் கெழுவானது எந்த ஒரு அலகையும் குறிக்காத ஒரு எண்ணாகும்.
4. ஒன்றை ஒன்று சாராத மாறிகள் தொடர்புடையன அல்ல.
5. ஒட்டுறவுக் கெழுவானது, இரு உடன் தொடர்புக் கெழுக்கலின் பெருக்கல் சராசரியாகும்.
6. x, y இன் ஒட்டுறவுக் கெழுவானது சமச்சீர் தன்மை உடையது. அதாவது $r_{xy} = r_{yx}$.

குறைகள்

1. எடுத்துக் கொண்ட கொள்கை சரியா அல்லது தவறா என்பதைக் கருதாமல் ஒரு நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பை மட்டுமே ஒட்டுறவுக் கெழு கூறுகிறது.
2. ஒட்டுறவுக் கெழுவில் மாறிகளின் முனை உறுப்புகள் பொருந்தாத முறையில் செயல்படுத்தப்படுகின்றன.
3. ஒட்டுறவுக்கெழு இருக்கிறது என்பதனால் அது காரண விளைவுகளைக் குறிக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

தர வரிசை ஒட்டுறவு

தொகுதிப் பண்பளவைகளின் எந்த வித கருத்துக்களும் எடுத்துக் கொள்ளாத பொழுது தர வரிசை ஒட்டுறவு காணப்படுகிறது. இது தரத்தினை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது பண்பளவுகளான, நேர்மை, நிறங்கள், அழகு, புத்திக் கூர்மை, குணநலன்கள், ஒழுக்கம் ஆகியவற்றைப் பற்றி அறிய பயன்படுகிறது. ஒரு தொகுதியில் உள்ள நபர்கள் வரிசைப் படுத்தப்பட்டு பின்னர் ஒவ்வொரு தனி நபருக்கும், அவருக்குரிய தரம் கொடுக்கப்படுகிறது.

இம்முறை எட்வர்ட் ஸ்பியர்மேன் (Edward Spearman) என்பவரால் 1904-ம் ஆண்டு உருவாக்கப்பட்டது. இது

$$\boldsymbol{R = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n}}$$

R = தர வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழு என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு சில ஆசிரியர்கள் தர ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கு ρ என்ற குறியீட்டெண்ணைப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

ΣD^2 = இரு தரவரிசைகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடுகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்.

n = மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை

R மதிப்பு -1ற்கும் +1ற்கும் இடையில் அமைகிறது. R = +**1** என இருக்குமானால் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட தரங்களிடையே முழுமையான ஒப்புமைத் தன்மை உள்ளது. தரங்கள் ஒரே திசை உடையதாக இருக்கும். R = **−1** எனில் தாங்கள் முழுமையாக வேறுபடுகின்றன எனவும், அவை எதிர்திசை உடையதாகவும் இருக்கும்.

சில சமமதிப்பு உள்ளவிடத்து தரஉறவு

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் சமமதிப்புகளாக இருந்தால், இவ் உறுப்புகளுக்கு பொதுவான தரங்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன. இச்சூழ்நிலைகளில் ஒவ்வொரு

உறுப்பிற்கும் சமமான தரம் கொடுக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, 5ஆவது தரத்தில் உள்ள மதிப்பு இரு முறை வருமேயானால், 5, 6 இவற்றின் சராசரியான $\frac{5+6}{2} = 5.5$ என்ற பொதுவான தரம் இரு உறுப்புகளுக்கும் கொடுக்கப்படுகிறது.

சம தரங்கள் இருக்குமானால், திருத்த காரணி சேர்ப்பது அவசியமாகிறது. அது $\frac{1}{12}(m3 - m)$ ஆகும். ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் சம மதிப்பைப் பெற்றால்,

$$R = 1 - \frac{6\,[\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - 3) + \frac{1}{12}(m^3 - 3) + \cdots]}{n^3 - n}$$

இங்கு 'm' என்பது சமதரங்கள் பெற்ற உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். இது எத்தனை சம தரங்கள் உடையனவோ, அவை அனைத்திற்கும் திருத்த காரணி சேர்க்கப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

ஒரு சந்தை ஆய்வில், ஒரு நகரத்தில் தரத்தின் அடிப்படையில் தேநீர் மற்றும், காப்பியின் விலை நிலவரம் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவற்றின் விலைகளுக்கு இடையிலான தொடர்பினை உன்னால் காண இயலுமா ?

தேநீர் விலை	88	90	95	70	60	75	50
காபியின் விலை	120	134	150	115	110	140	100

தீர்வு

தேநீர் விலை	தரம்	காபியின் விலை	தரம்	D	D^2
88	3	120	4	1	1
90	2	134	3	1	1
95	1	150	1	0	0
70	5	115	5	0	0
60	6	110	6	0	0
75	4	140	2	2	4
50	7	100	7	0	0
					$\sum D^2 = 6$

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 6}{7^3 - 7}$$

$$= 1 - \frac{36}{343 - 7}$$

$$= 1 - \frac{36}{336}$$

$$= 1 - 0.1071$$

$$= 0.8929$$

தேநீர், மற்றும் காபி இவற்றின் விலைகளுக்கு இடையில் உள்ள நேர் உறவு 0.89. தரங்கள் அடிப்படையில் இவற்றின் விலைகளுக்கிடையிலான தொடர்பானது மிக அதிக நேர் உறவு உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 3

இரு தேர்வாளர்களால் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட விடைத்தாள்களின் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

1st	88	95	70	60	50	80	75	85
2nd	84	90	88	55	48	85	82	72

இருவரால் செய்யப்பட்ட மதிப்பீடு சரியானவை என்ற கருத்துடன் நீ உடன்படுகிறாயா ?

தீர்வு

X	R1	Y	R2	D	D^2
88	2	84	4	2	4
95	1	90	1	0	0
70	6	88	2	4	16

60	7	55	7	0	0
50	8	48	8	0	0
80	4	85	3	1	1
85	3	75	6	3	9
					$\sum D^2 = 30$

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 30}{8^3 - 8}$$

$$= 1 - \frac{180}{512 - 8}$$

$$= 1 - \frac{180}{504}$$

$$= 1 - 0.357$$

$$= 0.643$$

எடுத்துக்காட்டு 4

ஒரு வகுப்பில் உள்ள 10 மாணவர்கள் இரு தேர்வில் எடுத்த மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

மாணவர்கள்	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
தேர்வு 1	70	68	67	55	60	60	75	63	60	72
தேர்வு 2	65	65	80	60	68	58	75	63	60	70

இரு தேர்வு மதிப்பெண்களுக்கிடையிலான தர ஒட்டுறவு காண்க.

தீர்வு:

மாணவர்கள்	தேர்வு 1	R1	தேர்வு 2	R2	D	D^2
A	70	3	65	5.5	- 2.5	6.25
B	68	4	65	5.5	-1.5	2.25
C	67	5	80	1.0	4.0	16.00
D	55	10	60	8.5	1.5	2.25
E	60	8	68	4.0	4.0	16.00
F	60	8	58	10.0	-2.0	4.00
G	75	1	75	2.0	-1.0	1.00
H	63	6	62	7.0	-1.0	1.00
I	60	8	60	8.5	0.5	0.25
J	72	2	70	3.0	-1.0	1.00
						$\sum D^2$ =50.00

தேர்வு 1 ல் 60 மூன்று முறை இடம் பெற்றுள்ளது.

2ஆவது தேர்வில் 60, 65 இரு முறை மீண்டும் மீண்டும் வந்துள்ளது.

m = 3 ; m = 2 ; m = 2

$$R = 1 - \frac{6\,[\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - 3) + \frac{1}{12}(m^3 - 3) + \cdots]}{n^3 - n}$$

$$= 1 - \frac{6[50 + \frac{1}{12}(3^3 - 3) + \frac{1}{12}(2^3 - 2) + \frac{1}{12}(2^3 - 2)]}{10^3 - 10}$$

$$= 1 - \frac{6[50 + \frac{1}{12}(27 - 3) + \frac{1}{12}(8 - 2) + \frac{1}{12}(8 - 2)]}{1000 - 10}$$

$$= 1 - \frac{6[50 + \frac{1}{12}(24) + \frac{1}{12}(6) + \frac{1}{12}(6)]}{990}$$

$$= 1 - \frac{6[50 + \frac{24}{12} + \frac{6}{12} + \frac{6}{12}]}{990}$$

$$= 1 - \frac{6[50 + 2 + 0.5 + 0.5]}{990}$$

$$= 1 - \frac{6[53]}{990}$$

$$= 1 - \frac{672}{990}$$

$$= 1 - 0.678$$

$$= 0.322$$

பயிற்சி வினாக்கள்

ஒட்டுறவு என்பதன் உட்கருத்து பற்றி விவாதிக்கவும்

1. ஒருமுக விலக்கக் கெழுவினை வரையறுக்கவும்
2. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் பயன்கள் யாவை?
3. பின்வரும் தொடர்புகளுக்கான கார்ல் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க

x	10	12	18	24	23	27
y	13	18	12	25	30	10

(r=0.255)

4. பின்வரும் தொடர்புகளுக்கான கார்ல்பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் காண்க

X	:	65	66	67	67	68	69	70	72
Y	:	67	68	65	68	72	72	69	71

(r=0.603)

5. பின்வரும் தொடர்புகளுக்கான கார்ல்பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக

விலை	:	10	12	14	16	18	20	22	24
தேவை	:	20	18	15	13	12	9	10	7

(r= -0.978)

6. பின்வரும் தொடர்புகளுக்கான கார்ல் பியர்சனின் ஒட்டுறவுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக

x	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39
y	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32

(r=0.995)

7. ஒரு வகுப்பில் உள்ள 10 மாணவர்கள் இரு தேர்வில் எடுத்த மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

மாணவர்கள்	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
தேர்வு 1	4	8	6	7	5	3	2	1	9	10
தேர்வு 2	4	3	7	9	10	6	5	2	1	8

இரு தேர்வு மதிப்பெண்களுக்கிடையிலான தர ஒட்டுறவு காண்க.

(r= - 0.297)

8. இரு தேர்வாளர்களால் மதிப்பீடு செய்யப்பட்ட விடைத்தாள்களின் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

1st	30	50	80	40	70	100	20	10	60	90
2nd	60	40	90	80	10	20	30	100	50	70

இருவரால் செய்யப்பட்ட மதிப்பீடு சரியானவை என்ற கருத்துடன் நீ உடன்படுகிறாயா ?

(r=0.139)

உடன் தொடர்புப் போக்கு

அறிமுகம்

இரு மாறிகளுக்கிடையே தொடர்பு உள்ளது என அறிந்த பின்னர், ஒரு மாறியின் மதிப்பு தெரியும் பொழுது மற்றொரு தெரியாத மாறியின் மதிப்பை முன்மதிப்பீடு செய்ய நாம் விரும்பலாம். இவ்வாறு மதிப்பீடு செய்யக்கூடிய மாறி சார்புடைய மாறி அல்லது விளக்கப்படுகிற மாறி எனவும் மற்றும் தெரிந்த மாறியை சார்பற்ற மாறி என்கிறோம். மதிப்பீடு செய்வதற்கு அடிப்படை, புள்ளியியல் இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி தொடர்பைக் குறிப்பதே உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வாகும். சமன்பாட்டை உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு அல்லது விளக்குகின்ற சமன்பாடு என அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, விளம்பரத்திற்கும் விற்பனைக்கும் ஒட்டுறவு உள்ளது என அறிவோமானால், செலவிடப்பட்ட விளம்பரத்திற்கு எதிர்பார்க்கப்படும் விற்பனையை அறியலாம் அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட விற்பனை இலக்கினை அடைய செலவிடப்பட வேண்டிய விளம்பரச் செலவு எவ்வளவு என அறியலாம். அதே போல விளைச்சலின் அளவு மழையின் தன்மையோடு தொடர்புடையது. எவ்வளவு மழை பெய்தால் ஒரு குறிப்பிட்ட விளைச்சல் கிடைக்கும் என்பதையும், ஒரு குறிப்பிட்ட விளைச்சல் காண்பதற்கு எவ்வளவு மழை அவசியம் என்பதையும் முன்கூட்டியே கணக்கிட உடன் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு மிக்க உதவி புரிகின்றது. தொடர்புடைய இரு மாறிகளானது, மழையின் அளவு மற்றும் விவசாய உற்பத்தி, உற்பத்திக்கான விலை மற்றும் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளின் பொதுவான விலை, நுகர்வோரின் வருமானம் மற்றும் செலவீனம் எனக் கொள்ளலாம். ஆகவே, உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு தெரியப்படுத்துவது, இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி தொடர்பு மற்றும் இதன் மூலம் மதிப்பீடு அல்லது எதிர்பார்க்கும் மதிப்பைப் பெறலாம்.

வரையறை

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையே ஆன சராசரி தொடர்பினை, விவரங்களின் மூல அலகுகளை கொண்டு அளவிடப்படுவது உடன் தொடர்புப் போக்காகும்.

உடன் தொடர்புப் போக்கின் வகைகள்

உடன் தொடர்புப் போக்கின் ஆய்வு பாகுபடுத்தப்படுவது

(அ) எளிய மற்றும் மடங்கு

(ஆ) நேர்க்கோடு மற்றும் நேர்கோடற்ற

(இ) மொத்தம் மற்றும் பகுதி

(அ) எளிய மற்றும் மடங்கு

இரு மாறிகள் எளிய தொடர்பினைக் கொண்டுள்ளது எனக் கொண்டால், எடுத்துக்காட்டாக விளம்பரச் செலவீனத்தின் தாக்கம் விற்பனையை அதிகரிக்கின்றது.

இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையேயான தொடர்பு மடங்கு தொடர்புப் போக்கில் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இங்கு ஒரு மாறி சார்புடைய மாறி மற்ற மாறிகள் சார்பற்ற மாறிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, விற்பனையானது (y) விளம்பரச் செலவீனம் (x) மற்றும் மக்களது வருமானம் (z) ஆகியவற்றை சார்ந்துள்ளது. எனவே, தொடர்பின் சார்பானது y = f (x, z) ஆகும்.

(ஆ) நேர்க்கோடு மற்றும் நேர்கோடற்ற

நேர்கோட்டு போக்கினை அடிப்படையாகக் கொண்ட, நேர்கோட்டின் தொடர்பு சமன்பாட்டின் படி ஒன்று ஆகும். ஆனாலும் நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பானது எளிய மற்றும் மடங்கு ஆகும். இயல்பாக நேர் கோட்டுத் தொடர்பை எடுத்துக் கொள்வதால், அதனின் எளிமை மற்றும் சிறந்த மதிப்பீடு, மற்றும் எதிர்காலத்தில் இதன் போக்கினை முன்னறிவதற்கும் எளியதாக உள்ளது. நேர்கோடற்ற தொடர்பிற்கு வளைவரை போக்குக் கோடுகள் நிறுவப்படுகின்றன. இவற்றின் சமன்பாடுகள் பரவளைவு ஆகும்.

(இ) மொத்தம் மற்றும் பகுதி

எல்லா முக்கியத்துவ மாறிகளை எடுத்துக் கொண்டு அதனின் மொத்த தொடர்புகளை எடுத்துக் கொள்வதாக கொள்வோம். இயல்பாக இவை பல்வேறான தொடர்புகளை பெற்றிருக்கும் ஏனெனில் பெரும்பாலான பொருளாதார மற்றும் வியாபார தனிச் சிறப்பு பெற்றவைகள் பலவித இன்னல்களால் பாதிக்கப்பட்டிருக்கும். பகுதி தொடர்பால், ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளை எடுத்துக் கொண்டால், அனைத்தும் அல்லாமல், நோக்கத்தினைக் கருத்தில் கொண்டு பாதிக்கக் கூடியவைகளைத் தவிர்த்து தொடர்பினைப் பெறலாம்.

நேர்க்கோட்டுத் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாடு

இரு மாறிகளுக்கிடையே நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருக்குமானால், சார்பற்ற மாறி (X) வேறுபடும் பொழுது, சார்புடைய மாறி (Y) யும் வேறுபடுகிறது. X மற்றும் Y இன் பல்வேறு மதிப்புக்களை வரைபடத்தில் குறிக்கும்பொழுது, மிகப் பொருத்தமான இரு நேர் கோடுகள் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழியாகச் செல்கின்றது. இவ்விருகோடுகளும் தொடர்புப் போக்குக் கோடுகளாகும். மேலும் இவ்விரு கோடுகளும் தொடர்புப் போக்குச் சமன்பாட்டினை அடிப்படையாகக் கொண்டவை. இச்சமன்பாடுகள் மூலம் ஒரு மாறியின் மதிப்பு தெரியும் பொழுது தெரியாத மற்றொரு மாறியின் மதிப்பை சிறந்த மதிப்பீடாகக் காண முடியும். இவை நேர்கோட்டுச் சமன்பாடுகளாகும்.

X இன் மீதான Y இன் நேர்கோட்டுச் சமன்பாடானது

$$Y = a + b X \ldots\ldots. \ (1)$$

மற்றும் Y இன் மீதான X இன் நேர்கோட்டுச் சமன்பாடானது

$$X = a + b\,Y \ldots\ldots\ (2)$$

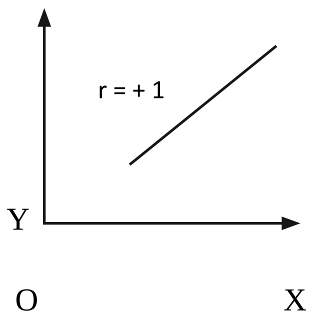
இங்கு a, b என்பன மாறிலிகளாகும்.

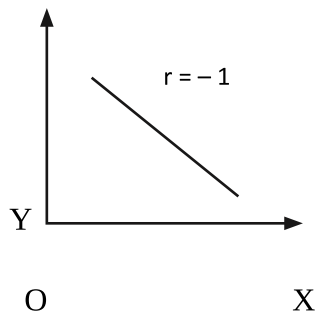
சமன்பாடு (1) இன் மூலம், X இன் மதிப்பு தெரியும் பொழுது Y இன் மதிப்பை மதிப்பீடு செய்யலாம்.

சமன்பாடு (2) இன் மூலம், X இன் மதிப்பு தெரியும் பொழுது Y இன் மதிப்பை மதிப்பீடு செய்யலாம்.

.உடன் தொடர்பு கோடுகள்

உடன் தொடர்பு கோடுகளின் ஆய்வில், இரு மாறிகளுக்கு இரு உடன் தொடர்புக் கோடுகள், Y இன் மீதான X ம், மற்றும் X இன் மீதான Y ம் ஆகும்.

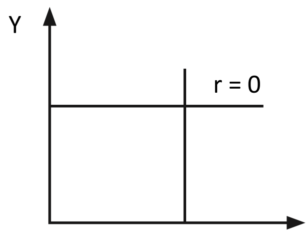


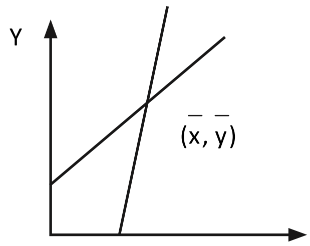


இவ்விரு உடன் தொடர்புக் கோடுகளும் இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினைக் குறிப்பதாகும்.

முழுமையான ஒட்டுறவில் நேரிடை அல்லது எதிரிடையாக உள்ள போது, அதாவது $r = \pm 1$ எனில் இரு கோடுகளும் ஒன்றாக இணையும். அதாவது ஒரே ஒரு நேர்கோடு மட்டுமே காணப்படும். $r=0$ எனில், இரு மாறிகளும் சார்பற்றவையாகும். இரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும். இவ்விரு கோடுகளும் X மற்றும் Y அச்சுக்கு இணையாக அமையும்.

கடைசியாக X மற்றும் Y களின் கூட்டுச்சராசரிகளைக் குறிக்கும் புள்ளியில் இரு கோடுகளும் வெட்டிக் கொள்கின்றன. இவ்வெட்டுப் புள்ளியிலிருந்து X அச்சுக்கு ஒரு நேர்கோடு வரையும் பொழுது X இன் கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கின்றது. இது போலவே, வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியிலிருந்து Y அச்சுக்கு செங்குத்துக் கோடு வரையும் பொழுது Y இன் கூட்டுச் சராசரி கிடைக்கிறது.





மீச்சிறு வர்க்கக் கொள்கை

இரு மாறிகளுக்கிடையேயான சராசரி தொடர்பினை, உடன் தொடர்பு வெளிப்படுத்துகின்றது. சிதறல் விளக்கப்படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறிகளின் மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளின் வழியே செல்லக் கூடிய மிகப் பொருத்தமான நேர்க்கோடாகும். இத்தகைய உடன் தொடர்பு கோடு வரைபடம் அல்லது கணக்கியலால் தருவிக்கப்படுகின்றது. பல்வேறான முறைகளைக் காண்பதற்கு முன் ‘‘மீச்சிறு வர்க்கங்கள்’’ என்பதன் விளக்கத்தை அறிவோம்.

மீச்சிறு வர்க்கங்கள் வாயிலாக பொருத்தப்பட்ட ஒரு கோட்டினை, சிறந்த பொருத்தமுடைய கோடு என்கிறோம். கீழ்க்கண்ட விதிகளைக் கோடு பின்பற்றுகிறது. .

i) தனித்த மதிப்புக்களுக்கும் தொடர்பு போக்கு மதிப்புக்களுக்கும் உள்ள வித்தியாச வர்க்கத்தின் கூடுதல் பூஜ்யமாகும்.

அதாவது $\sum(X - Xc)^2 = 0$ அல்லது $\sum (Y- Yc)^2 = 0$

Xc மற்றும் Yc மதிப்புகள் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் மூலம் கிடைக்கப் பெற்றவை.

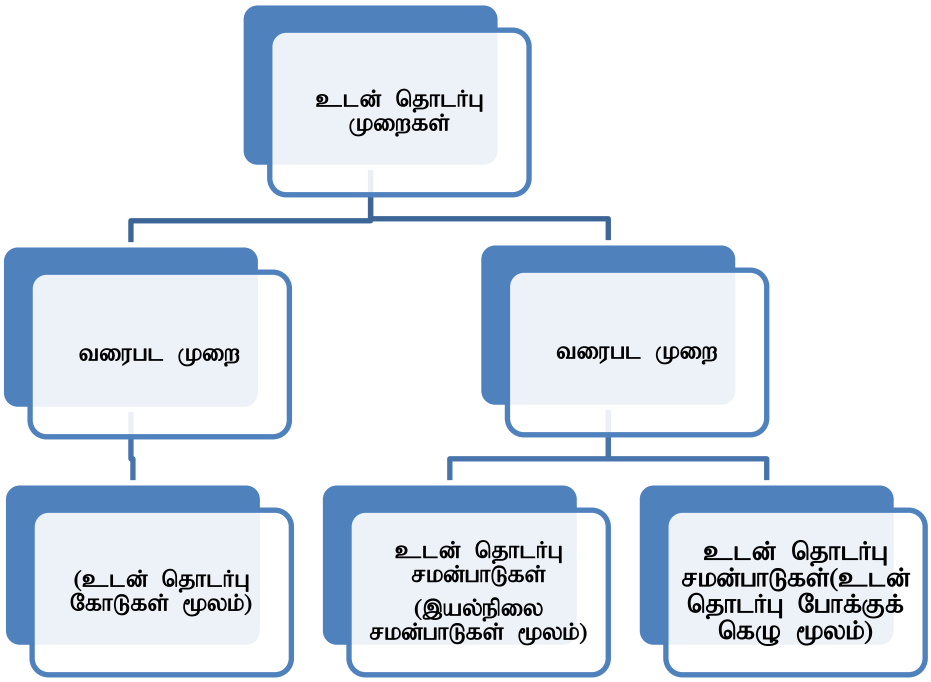
ii) தனித்த மதிப்புக்களுக்கும் தொடர்புப் போக்கு மதிப்புகளுக்கும் உள்ள வித்தியாசம், ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிலிருந்து காணப்பட்ட வித்தியாசத்தை விட குறைவாகவே இருக்கும்.

$\sum (Y - Yc)^2 < \sum (Y - Ai)^2$

iii) சிறந்த பொருத்தமுடைய உடன் தொடர்புப் போக்கு கோடுகள், X மற்றும் Y இன் கூட்டுச் சராசரியில் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்கின்றன. அதாவது அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் $\bar{X}, \bar{Y}$ ஆகும்.

உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் முறைகள்

உடன் தொடர்புப் போக்கின் பல்வேறு முறைகளை கீழ்க்கண்ட வரைபடத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.



வரைபட முறை

வரைபடத்தில் மாறிகளின் மதிப்புகளின் புள்ளிகள் குறிக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய புள்ளிகள் சிதறல் வரைபடம் போல பரவிக் கிடக்கின்றன. இப்புள்ளிகள் ஓர் உடன் தொடர்புக் கோட்டின் மூலம் கையினாலோ அல்லது அளவீடு கொண்டோ வரையப்படுகின்றன. அவ்வாறு வரையும் போது புள்ளிகளுக்கும் கோட்டிற்கும் உள்ள செங்குத்து வித்தியாசத்தின் வர்க்கம் மிகக் குறைவாக இருத்தல் வேண்டும். வரையப்படுகின்ற உடன் தொடர்பு கோட்டிற்கு இரு புறங்களிலும் சமமான புள்ளிகள் இருக்குமாறு சிறந்த உடன் தொடர்புக் கோட்டினை வரைதல் வேண்டும்

கணக்கியல் முறை

i) உடன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு இரு உடன் தொடர்பு சமன்பாடுகள் Y இன் மீதான X இன் சமன்பாடு $X = a + bY$ மற்றும் X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடு $Y = a + bX$ ஆகும். இங்கு X, Y என்பன மாறிகள் மற்றும் a, b என்பன மாறிலிகள், இவற்றின் மதிப்பை காணுதல் வேண்டும்.

சமன்பாடு $X = a + bY$ எனில், இதன் இயல்நிலை சமன்பாடுகள்

$$\sum X = Na + b\sum Y$$

மற்றும் $$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$$

சமன்பாடு, $Y = a + Bx$, எனில், இதன் இயல்நிலை சமன்பாடுகள்

$\sum Y = na + b\sum X$

மற்றும் $\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$

இயல்நிலை சமன்பாடுகளின் வாயிலாக a மற்றும் b மதிப்புக்கள் காணப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1

X	6	2	10	4	8
Y	9	11	5	8	7

தீர்வு

X	Y	X^2	Y^2	XY
6	9	36	81	54
2	11	4	121	22
10	5	100	25	50
4	8	16	64	32
8	7	64	49	56
$\sum X$=30	**$\sum Y$ =40**	**$\sum X^2$=220**	**$\sum Y^{2=}$340**	**$\sum XY$ =214**

X இன் மீதான Y இன் $Y = a + bX$ மற்றும் இதன் இயல்நிலை சமன்பாடுகளாவன

$$\sum Y = na + b\sum X$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

மதிப்புக்களை பிரதியிட நமக்குக் கிடைப்பது

$40 = 5a + 30b$ …… (1)

$214 = 30a + 220b$ . . . (2)

சமன்பாடு (1) ஐ 6 ஆல் பெருக்கும் பொழுது

$240 = 30a + 180b$……. (3)

(2)-(3) $-26=40b$

அல்லது $b=\frac{-26}{40}$ $b=-0.\ 65$

தற்பொழுது b இன் மதிப்பை சமன்பாடு (1)ல் பிரதியிட,

$40 = 5a + 30b$

$40=5a+30(-0.\ 65)$

$40=5a-19.\ 5$

$5a-19.\ 5-40=0$

$5a-59.\ 5=0$

$5a=59.\ 5$

$a=\frac{59.\ 5}{5}$

$a=11.\ 9$

ஆகவே தேவையான X இன் மீதான Y இன் சமன்பாடானது

$Y = 11.\ 9 - 0.\ 65\ X.$

Y இன் மீதான X இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு $X = a + bY$ மற்றும்

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளானது

$\sum X = na + b\sum Y$ மற்றும்

$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து பொருத்தமான மதிப்புக்களை பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது

$30 = 5a + 40b$ …. (3)

$214 = 40a + 340b$ …. (4)

(3) வது சமன்பாட்டை 8 ஆல் பெருக்கிட,

$240 = 40a + 320\ b$ …. (5)

(4) – (5) கொடுப்பது

$-26 = 20b$

$b=\frac{-26}{20}$

$b=-1.\ 3$

$b = -1.\ \ 3$ என சமன்பாடு (3) இல் பிரதியிட, கிடைப்பது

$30 = 5a - 52$

5a = 82

$a = \frac{82}{5}$

a=16. 4

ஆகவே Y இன் மீதான X இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

X = 16. 4 – 1. 3Y

எடுத்துக்காட்டு 2

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்பு போக்கு சமன்பாடுகளை காண்க

விலை	10	12	13	12	16	15
தேவை	40	38	43	45	37	43

விலை Rs 20ஆக இருக்கும் போது தேவை எவ்வளவு என்பதை காண்க

X	$X-\bar{X}$ x-13	x^2	Y	$y=Y-\bar{Y}$ Y-41	y^2	xy
10	-3	9	40	-1	1	3
12	-1	1	38	-3	9	3
13	0	0	43	2	4	0
12	-1	1	45	4	16	-4
16	3	9	37	-4	16	-12
15	2	4	43	2	4	4
∑X=78	**0**	$\sum x^2 = 24$	**∑Y=246**	**0**	$\sum y^2 = 50$	**∑ xy =-6**

X இன் மீதான Y இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$X-\bar{X} = r\frac{\sigma x}{\sigma y}(Y-\bar{Y})$$

$\bar{X}= \frac{78}{6}$ =13; $\bar{Y}=\frac{246}{6}$ =41

$r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{\sum XY}{\sum Y^2} = \frac{-6}{50} = -0.12$

X-13 = -0.12 (y-41)

X-13= -0.12y+4.92

X=-0.12+17.92

Y இன் மீதான X இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$\boldsymbol{Y - \bar{Y} = r\frac{\sigma y}{\sigma x}(X - \bar{X})}$$

$\bar{X}= \frac{78}{6}$ =13; $\bar{Y}=\frac{246}{6}$ =41

$r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{\sum XY}{\sum x^2} = \frac{-6}{24} = -\ 0.25$

Y-41= -0.25 (X-13)

Y-41= -0.25X+3.25

Y= - 0.25X + 44.25

விலை ரூ.20 ஆக இருக்கும் போது தேவை

Y= - 0.25X + 44.25

Y= - 0.25(20) + 44.25

Y= - 5+ 44.25

Y=39.25

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்பு போக்கு சமன்பாடுகளை காண்க

X	78	77	85	88	87	82	81	77	76	83	97	93
Y	84	82	82	85	89	90	88	92	83	89	98	99

X	dx= X-A X- 84	dx^2	Y	Dy=Y-A Y- 88	dy^2	dx.dy
78	-6	36	84	-4	16	24
77	-7	49	82	-6	36	42
85	1	1	82	-6	36	-6
88	4	16	85	-3	9	-12
87	3	9	89	1	1	3
82	-2	4	90	2	4	-4
81	-3	9	88	0	0	0
77	-7	49	92	4	16	-28
76	-8	64	83	-5	25	40
83	-1	1	89	1	1	-1
97	13	169	98	10	100	130
93	9	81	99	11	121	99
1004	**$\sum dx = -4$**	**$\sum dx^2 = 488$**	**1061**	**$\sum dy = 5$**	**$\sum dy^2 = 365$**	**$\sum dx.dy = 287$**

X இன் மீதான Y இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$\boldsymbol{X - \bar{X} = r\frac{\sigma x}{\sigma y}(Y - \bar{Y})}$$

$$\boldsymbol{r\frac{\sigma x}{\sigma y}} = \frac{\sum \mathbf{dxdy} - \frac{\sum \mathbf{dx} \times \sum \mathbf{dy}}{\mathbf{N}}}{\sum \mathbf{dy^2} - \frac{(\sum \mathbf{dy})^2}{\mathbf{N}}}$$

$$r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{287 - \frac{-4 \times 5}{12}}{365 - \frac{5^2}{12}}$$

$$r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{287 \times 12 - (-20)}{365 \times 12 - 25}$$

$$r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{3444 - (-20)}{4380 - 25}$$

$$r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{3444 + 20)}{4380 - 25}$$

$$r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{3464}{4355}$$

$$r\frac{\sigma x}{\sigma y} = 0.795$$

$\bar{X}= \frac{1004}{12}$ = 83.67; $\bar{Y}=\frac{1061}{12}$ = 88.42

X-83.67 = 0.795(Y-88.42)

X-83.67= 0.795Y- 70.29

X=0.795Y-70.29+83.67

X=0.795Y+13.38

Y இன் மீதான X இன் தொடர்புப் போக்கு சமன்பாடு

$$\boldsymbol{Y - \bar{Y} = r\frac{\sigma y}{\sigma x}(X - \bar{X})}$$

$$\boldsymbol{r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{\sum dxdy - \frac{\sum dx \times \sum dy}{N}}{\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N}}}$$

$$r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{287 - \frac{-4 \times 5}{12}}{488 - \frac{(-4)^2}{12}}$$

$$r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{287 \times 12 - (-20)}{488 \times 12 - 6}$$

$$r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{3444 - (-20)}{5856 - 6}$$

$$r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{3444 + 20)}{5856 - 6}$$

$$r\frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{3464}{5850}$$

$$r\frac{\sigma y}{\sigma x} = 0.59$$

Y-88.42 = 0.59 (X – 83.67)

Y-88.42 = 0.59X-49.37

Y= 0.59X- 49.37+88.42

Y= 0.59X+39.05

உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் பயன்கள்

1. உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வின் மூலம் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்பு தொடர்பினை வெளிப்படுத்தப் பயன்படுகிறது.
2. பொருளாதாரப் பகுப்பாய்வில் காரணம் மற்றும் காரிய தொடர்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு பெருமளவில் பிரச்சனைகள் அமைகின்றன. பொருளாதாரம் மற்றும் வர்த்தக ஆய்வுகளுக்கு, உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு மிக உயர்ந்த மதிப்பு மிக்க புள்ளியியல் கருவியாகும்.
3. உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு மூலம் கொடுக்கப்பட்ட சார்பற்ற மாறிகளின் மதிப்புகளுக்கு, சார்புடைய மதிப்புக்களை மதிப்பீடு செய்யலாம்.
4. உடன் தொடர்புப் போக்குக் கெழுவின் மூலம், ஒட்டுறவு கெழுவையும் “r“ நிர்ணயக் கெழுவையும் r^2 கணக்கிடலாம்.
5. புள்ளியியல் ஆய்வில் உடன் தொடர்புக் கெழுவைக் கொண்டு உற்பத்திச் சார்பு, தேவை வளைகோடு, விலைச் சார்பு, நுகர்வுச் சார்பு ஆகியவற்றை கணிக்க உடன் தொடர்புப் போக்கு ஆய்வு வெகுவாக பயன்படுகிறது.

ஒட்டுறவுக்கும் உடன் தொடர்புப் போக்குக்கும் உள்ள வேறுபாடு

	ஒட்டுறவு	உடன் தொடர்புப் போக்கு
1	ஒட்டுறவானது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கிடையே உள்ள நேர் அல்லது எதிர் தொடர்பை விளக்கும்.	உடன் தொடர்புப் போக்கானது ””திரும்புதல்”” எனப் பொருள்படும். இது ஒரு கணித அளவீடாகும். இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சராசரி தொடர்பைக் கணக்கிடுவதாகும்.
2	x, y ஆகிய இரண்டும் சம வாய்ப்பு மாறிகளாகும்.	இங்கு x என்பது சம வாய்ப்பு மாறியாகவும், y என்பது நிலையான மாறியாகவும் கொள்ளப்படுகிறது. சில சமயங்களில் இரண்டுமே சமவாய்ப்பு மாறிகளாக கொள்ளப்படுகின்றன.
3	இரு மாறிகளின் தொடர்பை விளக்குவதோடு அத்தொடர்பின் நெருக்கத்தை எண்ணிக்கை அளவில் கொடுக்குமேயன்றி தொடர்பிற்கான காரணகாரியங்களை விளக்குவதில்லை.	இது இரு மாறிகளுக்கிடையே காரணகாரியத் தொடர்பை விளக்கும். இது இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள சார்புத் தொடர்பை விளக்குகிறது.

4	இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பை சோதனை செய்வதற்கும் சரி பார்த்தலுக்கும் உபயோகப்படுத்தப்படும். இது குறைந்த பட்ச தகவல்களைத் தான் தரும்.	இது சரிபார்ப்பதற்கு மட்டுமல்லாது கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மாறியின் மதிப்பிற்கேற்ப மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிட உதவி புரிகின்றது
5	ஒட்டுறவுக் கெழு ஒரு ஒப்பீட்டு அளவாகும். இதன் தொடர்பானது -1 மற்றும் +1க்கும் இடையே உள்ள வீச்செல்லையில் அமையும்.	உடன் தொடர்பு கெழுவானது ஒரு தனி எண்ணாகும். இது சார்பற்ற மாறியின் மதிப்பின் மூலம் சார்புள்ள மாறியின் மதிப்பைக் கணக்கிடப் பயன்படுகிறது.
6	இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவு போலி ஒட்டுறவாகவும் இருக்கும்.	இரு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள உடன் தொடர்பில் போலி உடன் தொடர்பென்பது கிடையாது.
7	இதனை பயன்படுத்து முறை வரையறைக்குட் பட்டது. ஏனெனில் இது மாறிகளுக்கு இடையே நேர் கோட்டுத் தொடர்பை மட்டுமே விளக்குகின்றது.	இது பரவலாகப் பயன்படுத்தப் படுகின்றது. ஏனெனில் இது நேர்க்கோட்டுத் தொடர்பு மட்டுமல்லாது வளைகோட்டுத் தொடர்பையும் விளக்கவல்லது.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. பின்னடைவு பகுப்பாய்வின் பயன்களை விளக்குக
2. மாறிகளின் தொடர்பு பற்றிய உட்கருத்தை விளக்கி பயன்பாடுகளைக் குறிப்பிடுக.
3. ஒட்டுறவுக்கும் உடன் தொடர்புப் போக்குக்கும் உள்ள வேறுபாடு
4. கீழ்க்காணும் விபரங்களுக்கு இரண்டு உடன் தொடர்பு போக்கு சமன்பாடுகளை காண்க

x	3	6	5	4	4	6	7	5
y	3	2	3	5	3	6	6	4

X=0.375y+3.5, Y=1.5+0.5x

5. கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்பு போக்கு சமன்பாடுகளை காண்க

X	:	1	2	3	4	5
Y	:	2	3	5	4	6

X=0.9y-0.6 Y=1.3+0.9x,

6. கீழ்க்கண்ட விபரங்களுக்கு இரு உடன் தொடர்பு போக்குச் சமன்பாடுகளை காண்க

X	:	45	42	44	43	41	45	43	40
Y	:	40	38	36	35	38	39	37	41

X=-0.178y+49.66, Y=47.37-0.218x

7. கீழ்க்காணும் விபரங்களிலிருந்து இரண்டு தொடர்பு சமன்பாடுகளை கணக்கிடுக

X	:	10	12	13	12	16	15
Y	:	40	38	43	45	37	43

X=-0.12y+17.92, Y=44.25-0.25x

அறிமுகம்

புள்ளியியல் விவரங்களை கால வரிசையாக, அதாவது விவரங்கள் நிகழ்கின்ற, காலத்தைப் பொருத்து ஒழுங்குபடுத்துதலே ‘‘காலத்தொடர் வரிசை”யாகும். இத்தகைய தொடர்கள் பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகப் புள்ளியியல் துறைகளில் ஒரு தனி முக்கியத்துவம் வாய்ந்த இடத்தை வகிக்கிறது. வரும் காலங்களின் மக்கள் தொகைப் பெருக்கத்திற்கேற்ப உணவு அளித்தல் மக்களுக்கான வேலை வாய்ப்பு இன்னும் இது போன்றவற்றை திட்டமிடுவதில் ஒரு பொருளியலான ஆர்வம் காட்டலாம். இது போலவே ஒரு வியாபாரி தனது பொருளின் வருங்காலத் தேவைக்கேற்ப உற்பத்தியை சரி செய்வதற்காக அதன் வருங்கால விற்பனை அளவைப் பற்றிய மதிப்பீடு காண விழையலாம். இதன் தொடர்பாக அடுத்தடுத்த கால இடைவெளிகளில் சேகரிக்கப்பட்டு பதியப்பட்ட புள்ளியியல் விவரங்களை ஒருவர் ஆராய வேண்டியுள்ளது. இத்தகைய விவரங்கள் பொதுவாக ‘‘காலத்தொடர் வரிசைகள்”” என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

வரையறை

மூரிஸ் ஹம்பர்க் என்பவர் ‘‘காலத் தொடர் வரிசை என்பதுகாலவாரியாக ஒழுங்கு படுத்தப்பட்ட புள்ளியியல் விவரங்கள’’ என்று வரையறுக்கிறார்.

‘‘பொருளியியல் மாறி அல்லது கூட்டு மாறிகளின் வெவ்வேறு கால இடைவெளிகளில் நடைபெற்ற அளவீடுகளின் தொகுப்பு’’என காலத்தொடர் வரிசையை யா-லூன்-சோ வரையறுக்கிறார்.

காலத்தொடர் வரிசை என்பது சமகால இடைவெளிகளில் நடைபெற்ற எண் விவரங்களின் தொகுப்பு ஆகும். இச்சம கால இடைவெளியானது மணியாகவோ, நாளாகவோ, மாதமாகவோ, வருடமாகவோ, வருடங்களின் தொகுப்பாகவோ இருக்கலாம். ஒரு இடத்தில் ஒரு நாளில் ஒரு மணி நேர இடைவெளியில் அளவிடப்பட்ட வெப்பநிலை அளவுகள், தினசரி விற்பனை, ஒரு தொழிற்சாலையின் மாதாந்திர உற்பத்தி, ஆண்டு தோறும் உள்ள விவசாய உற்பத்தி, பத்தாண்டுகளில் எடுக்கப்படும் மக்கள் கணக்கீட்டில் உள்ள மக்கள் தொகை வளர்ச்சி முதலியன காலத் தொடர் வரிசைகளாகும்.

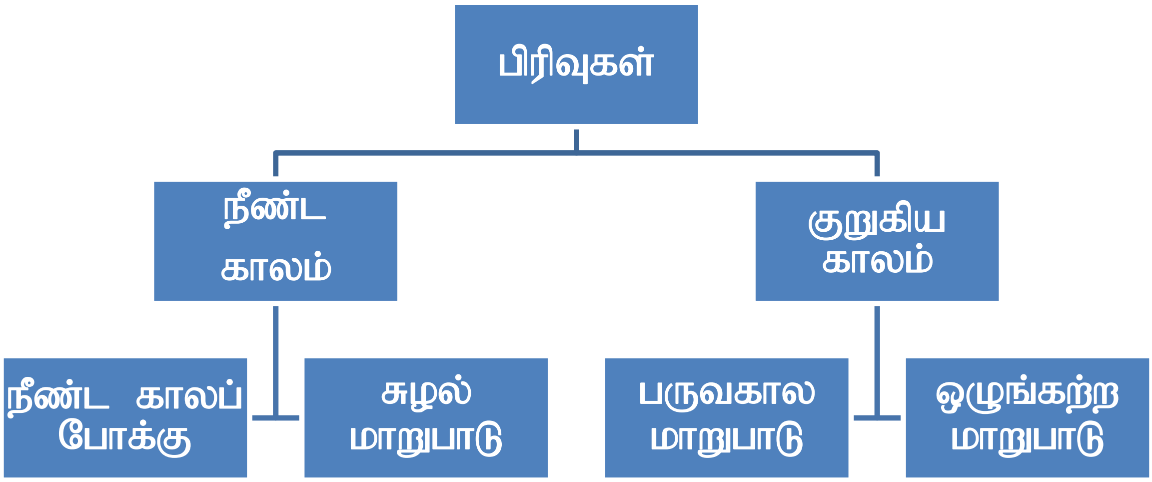
எண்ணற்ற காரணிகள், தொடர்ச்சியாக காலத் தொடர் வரிசையின் அளவீடுகளைப் பாதிக்கின்றன. அவற்றில் சில சம இடைவெளிகளில் நிகழ்கின்றன. மற்றவை திடீர் நிகழ்வுகளால் ஏற்படுகின்றன. அக்காரணிகளைக் கண்டு பகுத்தாய்வு செய்து அதனை தெளிவாக பயன்படுத்துவதே காலத் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு ஆகும்.

காலத்தொடர் வரிசையிலுள்ள விவரங்களில் காலப் போக்கிலேற்படுகின்ற மாறுதல்கள் பற்றிய ஒழுங்கு முறைகளைக் கண்டுபிடித்து அளவிடுதலே காலத்தொடர் வரிசையின் முக்கிய நோக்கமாகும். காலத்தொடர் வரிசையில் காணப்படுகின்ற பல்வேறு காரணிகளைத்

தனித்தனியாகப் பிரித்து அவற்றை வணிக முடிவெடுத்தலுக்குப் பயன்படுத்துவதே இதன் மைய நோக்கமாகும்.

காலத்தொடர் வரிசையின் பிரிவுகள்

காலத்தொடர் வரிசையில் உள்ள மாறுபாடுகளின் தேவைக்கேற்றவாறு பிரிப்பதே காலத் தொடர் வரிசையின் பிரிவுகள் ஆகும். அது கீழ்க்கண்டவாறு நான்கு பெரும் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன.



காலத்தொடர் பகுப்பாய்வில் இந்நான்கு பிரிவுகளுக்கிடையே ஒரு பெருக்கல் உறவு உள்ளதாகக் கருதப்படுகிறது.

குறியீட்டு முறையில், $Y = T \times S \times C \times I$

இங்கு Y என்பது நான்கு காரணிகளால் பெறப்படுகின்ற முடிவு. இங்கு

T = நீண்ட கால போக்கு

S = பருவ கால மாறுபாடு

C = சுழல் மாறுபாடு

I = ஒழுங்கற்ற மாறுபாடு

இப்பெருக்கல் முறையில் பல்வேறு காரணங்களால் ஏற்படுகின்ற நான்கு காரணிகளும் சார்பற்றவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை எனக் கருதப்படுகிறது.

மற்றொரு முறையில் காலத் தொடர் வரிசையில் காணப்படுகின்ற விவரங்கள் இந்நான்கு பிரிவின் கூடுதலாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. குறியீட்டில்,

$Y = T + S + C + I$

கூடுதல் முறையில் இந்நான்கு பிரிவுகளுமே ஒன்றை ஒன்று சார்ந்தவையல்ல என்று கருதப்படுகிறது.

காலத்தொடர் வரிசையின் நான்கு பிரிவுகள்

1) நீண்ட காலப் போக்கு அல்லது போக்கு

2) பருவ கால மாறுபாடு

3) சுழல் மாறுபாடு

4) ஒழுங்கற்ற அல்லது முறையற்ற மாறுபாடு

நீண்ட காலப் போக்கு

காலத்தொடர் வரிசையில் இது ஒரு நீண்ட கால அசைவு ஆகும். ஒரு காலத்தொடரின் பல ஆண்டுகளுக்குரிய மதிப்புக்கள் பொதுவான ஏற்றத்துடனோ அல்லது இறக்கத்துடனோஅல்லது நிலையாகவோ இருக்கும் இத்தன்மை நீண்டகாலப் போக்கு அல்லது எளிமையான போக்கு என்று அழைக்கப்படும். மக்கள் தொகைப் பெருக்கம், தொழில் நுட்ப முன்னேற்றத்தால் நுகர்வோர் விருப்பங்கள் மாறுபடுவதும் ஏறுகின்ற போக்கிற்கு காரணம் மருத்துவ வசதி அதிகரித்துள்ளதாலும் சுகாதார சூழ்நிலையாலும் இறப்பு வீதம் குறைந்து வருவதைக் காண இயலும். இதுவே போக்கின் இறக்கத்திற்கு காரணம். பொதுவாக காலத்தொடர் வரிசையின் இந்த ஏற்ற இறக்கங்கள் நீண்ட காலத்திற்கு இருக்கும்.

போக்கினை அளவிடும் முறைகள்

போக்கு கீழ்க்கண்ட கணித முறைகளில் அளக்கப்படுகிறது.

1) வரைபட முறை

2) அரை சராசரி முறை

3) நகரும் சராசரி முறை

4) மீச்சிறு வர்க்க முறை

வரைபட முறை

இம்முறையில் போக்கை அளப்பது மிகச் சுலபமும் எளிமையானதும் ஆகும். இதில் காலம் X - அச்சிலும் மதிப்புகள் Y - அச்சிலும் எடுக்கப்பட்டு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் வரைபடத்தின் புள்ளிகளாகக் குறிக்கப்படுகின்றன. புள்ளிகளை கையால் இணைத்து வளைவரை வரைய அது போக்கின் திசையைக் குறிக்கும். போக்குக் கோட்டை வரையும் பொழுது கீழ்க்கண்ட முக்கிய கருத்துகளை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

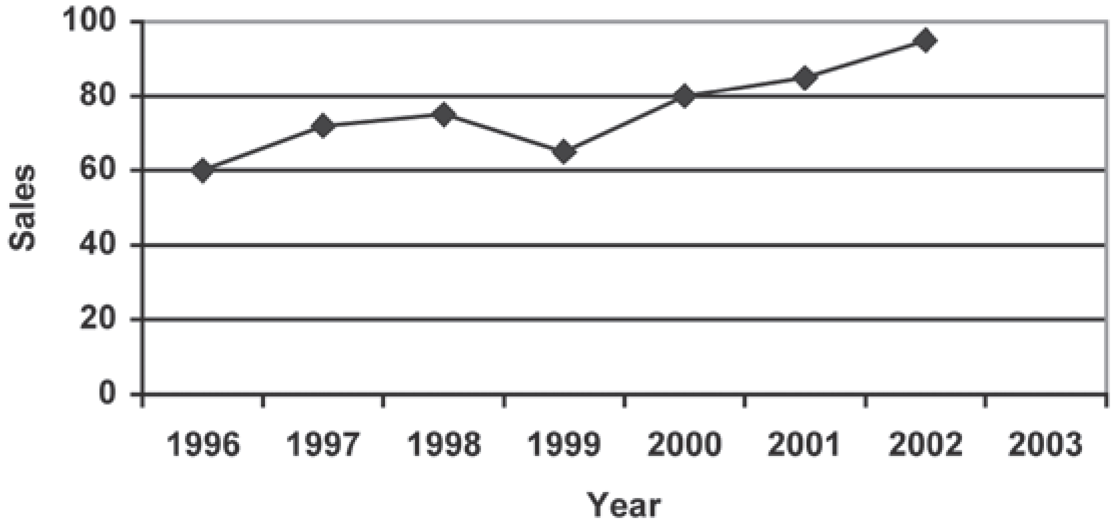
1. வளைவரை சீராக இருக்க வேண்டும்.
2. கூடிய வரையில் போக்குக் கோட்டிற்கு மேலும் கீழும் சம எண்ணிக்கை உள்ள புள்ளிகள் அமைய வேண்டும்.

3. புள்ளிகளிலிருந்து போக்குக் கோட்டிற்கு உள்ள செங்குத்து தூர வித்தியாசத்தின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் இயன்ற வரையில் சிறியதாக இருக்க வேண்டும்.
4. சுழல் மாறுபாடுகள் இருக்குமானால் போக்கிற்கு மேலும் கீழும் சம அளவு சுழல் மாறுபாடுகள் இருக்க வேண்டும்.
5. கோட்டிற்கு மேலே உள்ள சுழல்களின் பரப்பளவும் கீழே உள்ள சுழல்களின் பரப்பளவும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

பின்வரும் விவரங்களுக்கு வரைபட முறையில் போக்குக் கோடு வரைக

வருடம்	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
ஜீற்பனை (1000 ரூபாயில்)	60	72	75	65	80	85	95



நிறைகள்

1. இது மிகவும் சுலபமானதும், எளிமையானதும் ஆகும். இது உழைப்பையும் நேரத்தையும் மிச்சப்படுத்துகிறது.
2. எல்லா வகைப் போக்குகளையும் விளக்குவதற்கு பயன்படுகிறது.
3. இது போக்கின் பயன்பாடுகளில் விரிவாக உபயோகப் படுத்தப்படுகிறது.

குறைகள்

1. இது மிகவும் சார்புடையது. ஒரே மாதிரியான விவரங்களை வெவ்வேறு நபர்கள் வரையும் போது வெவ்வேறு போக்குக் கோடுகள் கிடைக்கின்றன.
2. இவ்வகைப் போக்குகளை முன்கணிப்பிற்கு பயன்படுத்துதல் விபரீத விளைவைக் கொடுக்கும்.
3. குறிப்பிட்ட அளவில் போக்கின் மதிப்பை கணக்கிட இயலாது.

அரை சராசரி முறை

இம்முறையில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை சம எண்ணிக்கை ஆண்டு மதிப்புகளுடன் கூடிய இரு அரைப்பகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக 1981-ல் இருந்து 1998 வரை உள்ள 18 வருடங்களுக்கான கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை முதல் 9 வருட விவரங்கள் அதாவது 1981ல் இருந்து 1990 வரை ஒரு பகுதியாகவும் 1990ல் இருந்து 1998 வரை மற்றொரு பகுதியாகவும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகள் ஒற்றை எண்ணிக்கையிலிருந்தால் நடு மதிப்பை நீக்கி விட்டு நடு மதிப்புக்கு மேலுள்ள மதிப்புகளை ஒரு பகுதியாகவும் நடுமதிப்புக்கு கீழுள்ள மதிப்புகளை மற்றொரு பகுதியாகவும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக 1991-ல் இருந்து 1997 வரை உள்ள 7 வருடங்களின் விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் 1994-ம் வருடத்தை நீக்கி விட்டு 1991 முதல் 1993 வரை உள்ள விவரங்களை ஒரு பகுதியாகவும், 1995 முதல் 1997 வரை உள்ள விவரங்களை மற்றொரு பகுதியாகவும் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

விவரங்கள் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட பின் ஒவ்வொரு பகுதியின் சராசரியை தனித்தனியே காண வேண்டும். அச்சராசரி மதிப்புகளை அப்பகுதிகளின் பிரிவு இடைவெளிகளின் மத்தியில் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். அப்புள்ளிகள் நேர்கோட்டில் இணைக்கப்படும் பொழுது தேவையான போக்குக்கோடு கிடைக்கும். இக்கோட்டினை மேல் நோக்கியும், கீழ் நோக்கியும் நீட்டுவதன் மூலம், இக்காலங்களுக்கு இடைப்பட்ட மதிப்புகளையும் வருங்கால மதிப்புகளையும் கணக்கிட இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

அரை சராசரி முறையில் போக்குக் கோடு வரைக.

வருடம்	1991	1992	1993	1994	1995	1996
விற்பனை (1000 ரூபாயில்)	60	75	81	110	106	120

தீர்வு

ஒவ்வொரு பகுதியிலும் 3 மதிப்புகள் இருக்குமாறு இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கவும்.

வருடம்	விற்பனை (Rs)	அரைப்பகுதியின் மொத்தம்	அரை சராசரி	போக்கு மதிப்புகள்
1991	60			59
1992	75	216	72	72
1993	81			85
1994	110			98
1995	106	333	111	111
1996	117			124

மைய ஆண்டுகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு = 1995 - 1992 = 3 வருடங்கள்

அரை சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு = 111 - 72 = 39

வருடாந்திரப் போக்கு = 39/3 = 13

1991-ன் போக்கு = 1992-ன் போக்கு -13

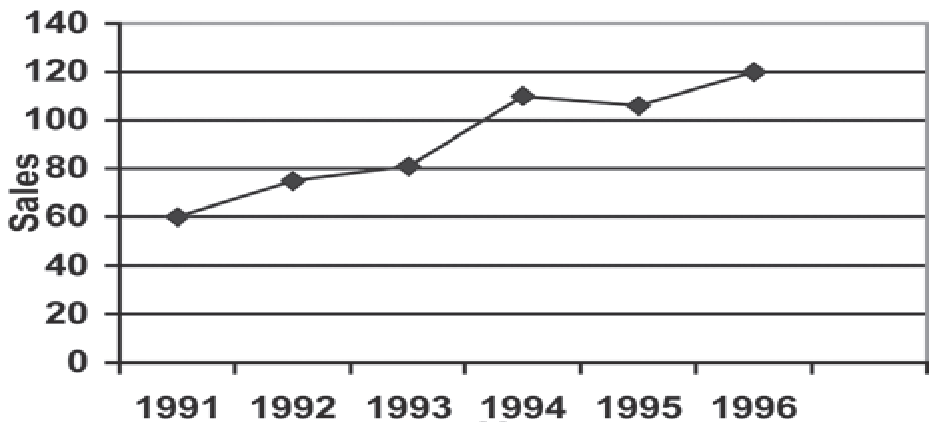
= 72 - 13 = 59

1993-ன் போக்கு = 1992-ன் போக்கு +13

= 72 + 13 = 85

இதே போல் மற்ற போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.

பின்வரும் வரைபடம் போக்குக் கோட்டினை தெளிவாக விளக்கும்.



எடுத்துக்காட்டு 3

பின்வரும் விவரங்களுக்கு அரை சராசரி முறையில் போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
செலவினங்கள் ரூ. லட்சத்தில்	1.5	1.8	2.0	2.3	2.4	2.6	3.0

தீர்வு

வருடம்	விற்பனை (Rs)	அரைப்பகுதியின் மொத்தம்	அரை சராசரி	போக்கு மதிப்புகள்
1995	1.5			1.545
1996	1.8	5.3	1.77	1.77
1997	2			1.995
1998	2.3			2.22
1999	2.4	7.3	2.43	2.445
2000	2.6			2.67
2001	3			2.895

மைய ஆண்டுகளுக்கிடையேயான வேறுபாடு = 2000 - 1996

= 4 வருடங்கள்

அரை சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு = 2.67 - 1.77

= 0.9

∴ வருடாந்திர போக்கு மதிப்பு = $\frac{0.9}{4} = 0.225$

1995 -ன் போக்கு = 1996 -ன் போக்கு - 0.225

= 1.77 - 0.225

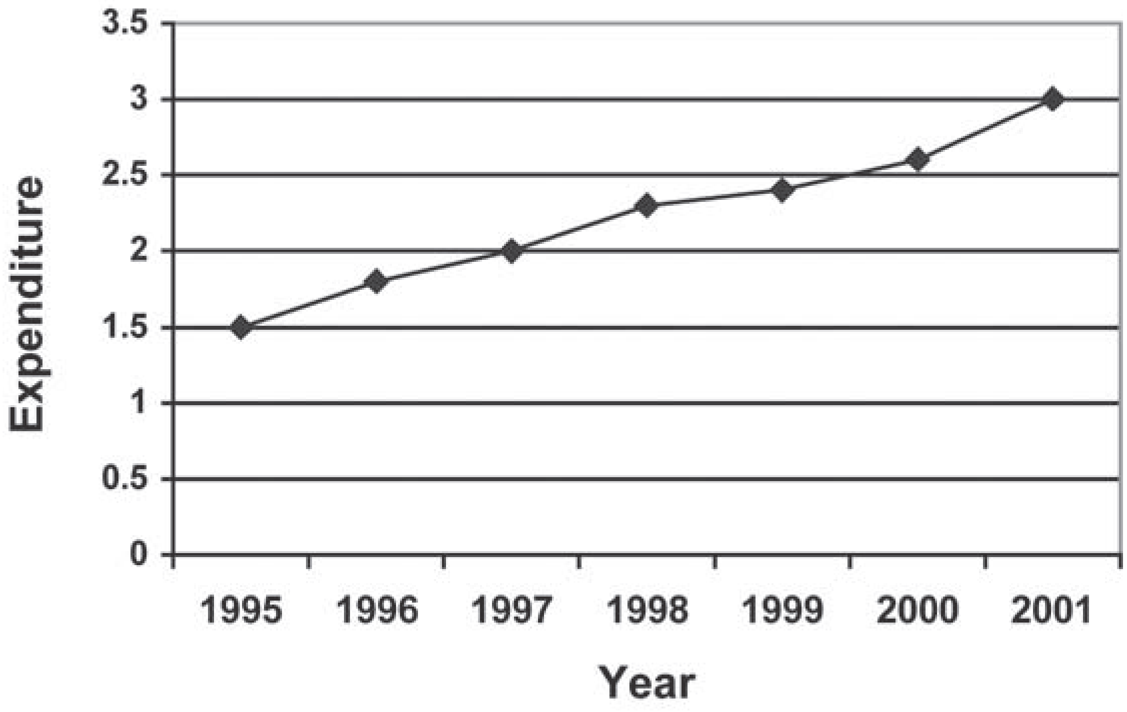
= 1.545

1996 -ன் போக்கு = 1.77

1997-ன் போக்கு = 1.77 + 0.225

= 1.995

இதே போல மற்ற மதிப்புகளைக் கணக்கிட வேண்டும்.



நிறைகள்

1. இம்முறை மிக எளிமையானது மற்றும் கணக்கிட சுலபமானது.
2. இம்முறையில் ஒவ்வொருவரும் ஒரே ஒரு போக்குக் கோட்டினையே பெற முடியும்.
3. இக்கோட்டினை இரு வழிகளிலும் நீட்டும் பொழுது கடந்த கால மதிப்பீடுகளையும் வருங்கால மதிப்பீடுகளையும் காண இயலும்.

குறைகள்

1. காலத்தொடர் வரிசையில் நேர்கோட்டுப் போக்கு இல்லாத பொழுது கூட அது இருக்கிறதென்ற தற்கோளின் அடிப்படையில் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.
2. இம்முறையில் பெறப்படும் போக்கு மதிப்புகள் நம்பகத்தன்மை உடையவை அல்ல.

நகரும் சராசரி முறை

இம்முறை மிக எளிமையானது. இது கூட்டு சராசரியை அடிப்படையாகக் கொண்டது. ஒரு கால வட்டத்திற்குள்ளடங்குகின்ற எல்லா மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடப்பட்டு அவற்றின் நடு மதிப்பிற்கு நேர் எழுத வேண்டும். பின் இரண்டாவது மதிப்பில் இருந்து ஒரு கால வட்டத்திற்குள்ளடங்குகின்ற மதிப்புகளின் கூட்டு சராசரியைக் கணக்கிட்டு அவற்றின் நடுமதிப்பிற்கு நேராக எழுத வேண்டும். இம்முறையைத் தொடர்ந்து இறுதி வரை செய்ய வேண்டும். இக்காலவட்டம் நகரும் சராசரி இடைவெளி என்று அழைக்கப்படும்.

ஒற்றையெண்ணிக்கை கால இடைவெளிக்கான நகரும் சராசரி முறை பின்வருமாறு

(3 அல்லது 5)

3 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் சராசரிகள் $\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+e}{3}$ ..... ஆகும்.

5 ஆண்டுகளுக்கான நகரும் சராசரிகள் முறையே $\frac{a+b+c+d+e}{5}$, $\frac{b+c+d+e+f}{5}, \frac{c+d+e+f+g}{5}$. ஆகும்.

நகரும் சராசரியின் கால வட்டம் ஒற்றையெண்ணிக்கை ஆண்டுகளாக இருந்தால் கணக்கிடுவதற்கான படிகள் (3 வருடங்கள்)

1. முதல் மூன்று வருடங்களுக்கான மொத்த மதிப்பை கணக்கிட்டு இரண்டாவது வருடத்திற்கு நேராக எழுத வேண்டும்.
2. முதல் மதிப்பை விடுத்து, அடுத்து வரும் மூன்று வருட மதிப்புகளைக் கூட்டி மூன்றாவது வருடத்திற்கு நேராக எழுத வேண்டும்.
3. கடைசி மதிப்பு எடுக்கப்படும் வரை இதே போல் தொடர்க.
4. ஒவ்வொரு மொத்த மதிப்பையும் 3 ஆல் வகுத்து அவையவற்றிற்கு நேராக அடுத்த நிரலில் எழுதுக.

இவையே நகரும் சராசரி முறையில் கணக்கிடப்பட்ட போக்கு மதிப்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4

பின்வரும் விவரங்களுக்கு 3 வருடங்களுக்கான நகரும் சராசரி கணக்கிடுக.

வருடம்	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
உற்பத்தி (டன்களில்)	50	36	43	45	39	38	33	42	41	34

தீர்வு

வருடம்	உற்பத்தி (டன்களில்)	3 வருடங்களுக்கான நகரும் மொத்தம்	3 வருடங்களுக்கான நகரும் சராசரியே போக்கு மதிப்புகள்
1975	50	-	-
1976	36	129	43.0
1977	43	124	41.3
1978	45	127	42.3
1979	39	122	40.7
1980	38	110	36.7
1981	33	113	37.7

1982	42	116	38.7
1983	41	117	39.0
1984	34	-	-

நகரும் சராசரியின் காலவட்டம் இரட்டை எண்ணிக்கை ஆண்டுகளாக இருந்தால்

ஒவ்வொரு தொகுதியின் மைய மதிப்பும் இரு காலப் புள்ளிகளுக்கு இடையில் அமையும். எனவே நகரும் சராசரிகளை மைய நிலைப்படுத்த வேண்டும்.

இதற்கான படிகள் பின்வருமாறு

1. முதல் நான்கு வருட மதிப்புக்களின் கூடுதலைக் கணக்கிட்டு அதனை இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது வருடத்தின் நடு பிரிவிற்கு நேராக மூன்றாவது நிரலில் எழுத வேண்டும்.
2. முதல் வருட மதிப்பை விடுத்து, அடுத்து வரும் 4 - வருட மொத்த மதிப்பையும் கணக்கிட்டு அதனை மூன்று மற்றும் நான்காவது வருடத்தின் நடுபிரிவிற்கு நேரே எழுத வேண்டும்.
3. கடைசி மதிப்பு எடுக்கப்படும் வரை இந்நிலையை தொடர வேண்டும்.
4. முதல் இரு நான்கு வருடக் கூடுதல்களின் மொத்தத்தை கணக்கிட்டு அதனை மூன்றாவது வருடத்திற்கு நேராக நான்காவது நிரலில் எழுத வேண்டும்.
5. முதல் நான்கு வருட கூடுதலை விடுத்து அடுத்து உள்ள இரு நான்கு வருடக் கூடுதல்களின் மொத்தத்தை கணக்கிட்டு 4-வது வருடத்திற்கு எதிராக எழுத வேண்டும்.
6. கடைசி 4-வருடக் கூடுதலைக் கணக்கில் எடுக்கும் வரை இந்நிலையைத் தொடர வேண்டும்.
7. 4-வது நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு கூடுதலையும் 8-ஆல் வகுத்து (இது 8-வருடங்களுக்கான கூடுதல்) அதை 5-வது நிரலில் எழுதுக. இவையே போக்கு மதிப்புகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

இந்தியாவின் தேயிலை உற்பத்தி பின்வருமாறு 4 வருட நகரும் எண்களைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
உற்பத்தி (டன்களில்)	464	515	518	467	502	540	557	571	586	612

தீர்வு

வருடம்	உற்பத்தி (டன்களில்)	4 வருடங்களுக்கான நகரும் மொத்தம்	2×4 வருடங்களுக்கான நகரும் மொத்தம்	4 வருடங்களுக்கான நகரும் சராசரியே போக்கு மதிப்புகள்
1993	464		-	-
		-		
1994	515			
		1964		
1995	518		3966	495.8
		2002		
1996	467		4029	503.6
		2027		
1997	502		4093	511.6
		2066		
1998	540		4236	529.5
		2170		
1999	557		4424	553.0
		2254		
2000	571		4580	572.5
		2326		
2001	586			
		-		
2002	612			

எடுத்துக்காட்டு 6

ஐந்தாண்டு நகரும் சராசரி முறையில் நீண்டகாலப் போக்கு காண்க

வருடம்	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
உற்பத்தி	332	317	357	392	402	405	410	427	405	431

தீர்வு:

வருடம்	உற்பத்தி	5 வருடங்களுக்கான நகரும் மொத்தம்	5 வருடங்களுக்கான நகரும் சராசரியே போக்கு மதிப்புகள்
1991	332		
1992	317		
1993	357	1800	360
1994	392	1873	374.6
1995	402	1966	393.2
1996	405	2036	407.2
1997	410	2049	409.8
1998	427	2078	415.6
1999	405		
2000	431		

நிறைகள்

1. மற்ற முறைகளோடு ஒப்பிடுகையில் இம்முறை புரிந்து கொள்வதற்கம் கையாள்வதற்கம் மிக எளிமையானது.
2. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுடன் இன்னும் சில விவரங்கள் சேர்க்கப்பட்டால் முழு கணக்கீடுகளிலும் மாற்றம் ஏற்படுவதில்லை. போக்கு மதிப்புகள் மட்டுமே அதிகரிக்கின்றன.
3. சுழல் மாறுபாடுகளின் ஒரு கால வட்டத்தை நகரும் சராசரி கால இடைவெளியாக எடுப்பதன் மூலம் முறையான சுழல் மாறுபாடுகள் முழுவதுமாக நீக்கப்படுகிறது.
4. குறிப்பாக தொடரின் போக்கு மதிப்புகள் ஒழுங்கற்றவையாக இருக்கும் பொழுது இம்முறை மிகவும் சிறப்பு வாய்ந்தது.

குறைகள்

1. முன்கணிப்பும், வருங்காலப் போக்கினை அறிவதையும் முக்கிய நோக்கமாகக் கொண்ட போக்கு பகுப்பாய்வில் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.
2. சில சமயங்களில் நகரும் சராசரியின் காலத்தேர்வு சூழ்நிலையைப் பொறுத்தது.
3. பொதுவாக நகரும் சராசரிகள், முனை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படுகின்றன.
4. இது ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகளை முற்றிலுமாக நீக்குவதில்லை.

மீச்சிறு வர்க்கமுறை

இம்முறை பரவலாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகிறது. பொருளாதார மற்றும் வணிக காலத் தொடர் வரிசைகளின் போக்கு மதிப்புகளைக் காண்பதில் இம்முறை முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது.

வருங்கால மதிப்பீட்டிற்கும், முன்கணிப்பிற்கும் இது பெரிதும் உதவுகிறது. இம்முறையில் பெறப்படும் போக்குக் கோடு மிக பொருத்தமான நேர்க்கோடு என்றழைக்கப்படுகிறது. போக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு $y = a + bx$, என்க. கொடுக்கப்பட்டுள்ள y மதிப்புகளுக்கும் இச்சமன்பாட்டின் மூலம் பெறப்படும் y மதிப்பீடுகளுக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தின் வர்க்கங்களின் கூடுதலை மீச்சிறு மதிப்பு ஆக்க வேண்டும் என்ற அடிப்படையில் a, b என்ற மாறிலிகள் மதிப்பிடப்படுகின்றன. இம்மாறிலிகள் பின்வரும் இயல்நிலை சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் கணக்கிடப்படுகின்றன.

$$\sum y = na + b\sum x \ \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 \ \ldots\ldots\ldots (2)$$

இங்கு x என்பது காலப் புள்ளிகளையும் y என்பது அதற்கான மதிப்புகளையும் குறிக்கின்றன. 'n' என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஜோடி மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை.

வருடங்கள் ஒற்றை எண்ணிக்கையாக அமையும் பொழுது

படி 1: கொடுக்கப்பட்ட வருடங்களை நிரல் 1-லும் அதற்கொத்த மதிப்பினை நிரல் 2-லும் எழுத வேண்டும்.

படி 2: 3-வது நிரலில், நிரல்-1ல் உள்ள வருடங்களுக்கு நேராக 0, 1, 2 .... என எழுதி அவற்றை X எனக் குறிக்க வேண்டும்.

படி 3: அதன் நடு உறுப்பை A என குறிக்க வேண்டும்.

படி 4: நடு உறுப்பு A -ல் இருந்து விலக்கம் $u = X - A$ கணக்கிட்டு அதனை நிரல் 4-ல் குறிக்க வேண்டும்.

படி 5: u^2 மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து நிரல் 5-ல் எழுத வேண்டும்.

படி 6: நிரல் 6-ல் உள்ள மதிப்புகள் பெருக்கல் uy ஐக் குறிக்க வேண்டும்.

இதற்கான இயல்நிலை சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு

$$\sum y = na + b\sum u \qquad (1) \text{ இங்குர } u = X\text{-}A$$

$$\sum uy = a\sum u + b\sum u^2 \qquad (2)$$

$\sum u = 0$, என்பதால் சமன்பாடு (1) ன் மூலம்

$$\boldsymbol{a = \frac{\sum y}{n}}$$

சமன்பாடு (2)-ன் மூலம்

$$\sum uy = b\sum u^2$$

$$\therefore \text{b}=\frac{\sum uy}{\sum u^2}$$

∴ மிகப் பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = a + bu = a + b\,(\text{X - A})$$

எடுத்துக்காட்டு 7

பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையைப் பயன்படுத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க

வருடம்	1990	1991	1992	1993	1994
உற்பத்தி டன்களில்	50	55	45	52	54

தீர்வு

வருடம் (x)	**உற்பத்தி (y)**	**X = x – 1990**	**u = x-A = x-2**	**u2**	**Uy**	**போக்கு மதிப்புகள்**
1990	50	0	– 2	4	– 100	50.2
1991	55	1	– 1	1	– 55	50.7
1992	45	**2 (A)**	0	0	0	51.2
1993	52	3	1	1	52	51.7
1994	54	4	2	4	108	52.2
Total	**256**			**10**	**5**	

A என்பது உத்தேச மதிப்பு

பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$Y = a + bX$

$= a + bu$, இங்கு $u = X – 2$

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு

$\sum y = na + b\sum u$……….(1)

$\sum uy = a\sum u + b\sum u^2$ ....(2)

$\Sigma u = 0$ என்பதால், சமன்பாடு (1) இன் மூலம் $\Sigma y = na$

$$a = \frac{\sum y}{n}$$

$$= \frac{256}{5} = 51.2$$

சமன்பாடு (2) இன் மூலம்

$\sum uy = b\sum u^2$

$5 = 10b$

$b = \frac{5}{10} = 0.5$

பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடானது

$y = a + bu$

$y = 51.2 + 0.5 (X-2)$

$y = 51.2 + 0.5X - 1.0$

$y = 50.2 + 0.5X$

போக்கு மதிப்புகள்

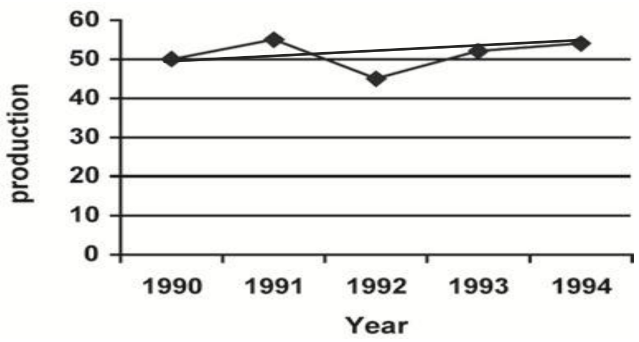
50.2, 50.7, 51.2, 51.7, 52.2

1996ம் வருட உற்பத்தியை மதிப்பிட

$X = x – 1990$ என பிரதியிடுக

$X = 1996 – 1990 = 6$

$Y = 50.2 + 0.5X = 50.2 + 0.5(6) = 50.2 + 3.0 = 53.2$ tonnes.



வருடங்கள் இரட்டையெண்ணிக்கையாக கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொழுது

இங்கு X ல் நடுவில் உள்ள இரு மதிப்புகளின் சராசரியை A என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். அப்பொழுது u = $\frac{X-A}{1/2} = 2(X-A)$ எனக் கிடைக்கும். வருடங்கள் ஒற்றை எண்ணிக்கையாக அமையும் பொழுது பின்பற்றிய மற்ற வழி முறைகளை இங்கும் பின்பற்ற வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 8

பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் போக்கக் கோட்டை பொருத்துக.

வருடம்	1983	1984	1985	1986	1987	1988
விற்பனை (லட்சங்களில்)	3	8	7	9	11	14

1991ம் வருட விற்பனை மதிப்பீடு காண்க.

தீர்வு

வருடம் (x)	**விற்பனை (y)**	**X = x-1983**	**u = 2X - 5**	**u^2**	**uy**	**போக்கு மதிப்புகள்**
1983	3	0	– 5	25	–15	3.97
1984	8	1	– 3	9	– 24	5.85
1985	7	2	– 1	1	– 7	7.73
1986	9	3	1	1	9	9.61
1987	11	4	3	9	33	11.49
1988	14	5	5	25	70	13.37
மொத்தம்	**52**		**0**	**70**	**66**	

$u = \frac{X - A}{1/2}$

$= 2(X - 2.5) = 2X - 5$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது

$$y = a + bX = a + bu$$

இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளாவன

$\sum y = na$ …….(1)

$\sum uy = b\sum u^2$ ……(2)

சமன்பாடு (1) ன் மூலம் 52 = 6a

$a = \frac{52}{6}$

$= 8.67$

சமன்பாடு (2) ன் மூலம் 66 = 70b

$b = \frac{70}{66}$

$= 0.94$

பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடானது

y = a + bu

y = 8.67+0.94(2X-5)

y = 8.67 + 1.88X - 4.7

y = 3.97 + 1.88X -----------(3)

போக்கு மதிப்புகளானது போக்கு கோட்டில் பின்வரும் மதிப்புகளை X ற்கு மதிப்பிட கிடைக்கின்றன

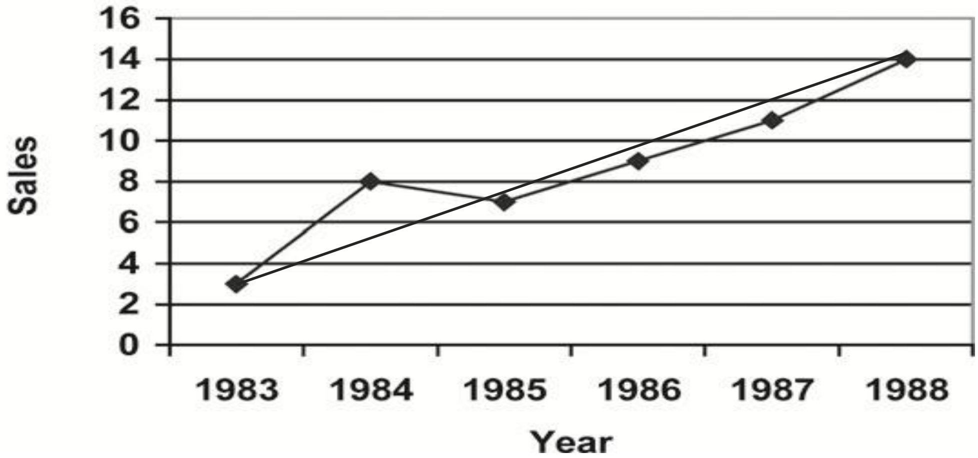
X = 0, y = 3.97	X = 1, y = 5.85
X = 2, y = 7.73	X = 3, y = 9.61
X = 4, y = 11.49	X = 5, y = 13.37

1991 ம் வருட விற்பனை மதிப்பீட்டை பெற X = x –1983 என பிரதியிடுக

1991 – 1983 = 8

y = 3.97 + 1.88 × 8

= 19.01 லட்சங்கள்



நிறைகள் :

1. இது ஒரு கணிதவியல் முறையாக இருப்பதால் இது எதைச் சார்ந்தும் அமையாது எனவே ஆய்வாளரின் சொந்த விருப்பு வெறுப்புகளை நீக்குகிறது.

2. இம்முறையில் வருங்கால மதிப்புகளை மதிப்பிடுவதோடு காலத் தொடர் வரிசையின் இடைப்பட்ட மதிப்புகளையும் மதிப்பிட இயலும்.

3. அனைத்து போக்கு மதிப்புகளையும் இம்முறையில் கணக்கிட இயலும்.

குறைகள் :

1. இது ஒரு கடினமான முறை சில மதிப்புகளை சேர்க்கும் பொழுது கணக்கீடுகளை மீண்டும் செய்ய வேண்டும்.

2. வணிக பொருளாதார காலத்தொடர்கள் நேர்க்கோட்டு போக்காக இருப்பதில்லை என்பதால் இவை நேர்க்கோட்டு போக்குடையவை என்று அனுமானித்து இப்போக்கு மதிப்புகளை கணக்கிட்டால் சில நேரங்களில் தவறுகள் ஏற்படலாம்.

3. இது சுழல், பருவகால மற்றும் முறையற்ற மாறுபாடுகளை கருத்தில் கொள்வதில்லை.

4. போக்கு மதிப்பீடுகளை அடுத்து வருகின்ற சில காலங்களுக்கு மட்டுமே மதிப்பிட இயலும். நீண்ட கால அளவில் பெறுகின்ற மதிப்பீடுகள் பொருத்தமாக இராது.

பருவகால மாறுபாடுகள் :

பருவகால மாறுபாடுகள் என்பது ஒரு வருடத்திற்குள் பருவத்திற்கேற்ப ஏற்படக்கூடிய ஏற்ற இறக்கங்களாகும். பருவகால மாறுபாடுகள் ஏற்படுவதற்கான காரண காரியங்களாவன

i) ஒரு இடத்தின் தட்ப வெப்பநிலை மற்றும் வானிலை

ii) மக்களின் தொன்று தொட்டு வரும் பழக்க வழக்கங்கள்

எடுத்துக்காட்டாக கோடை காலத்தில் ஐஸ்கிரீம் விற்பனை, மழை காலத்தில் குடை விற்பனை, குளிர்காலத்தில் கம்பளி ஆடைகள் விற்பனை மற்றும் சாகுபடி காலங்களில் விளைச்சல் போன்றவை அதிகரிக்கின்றன.

இரண்டாவதாக, திருமண காலங்களில் தங்கத்தின் விலை கூடுகிறது. பண்டிகை காலங்களில் பட்டாசு, புதுத்துணிகள் ஆகியவற்றின் விலை ஏறுகிறது.

எனவே உற்பத்தியாளர்கள், விற்பனையாளர்கள், வியாபாரிகள், வாடிக்கையாளர்கள் போன்ற அனைவருக்கும் வருங்காலத்தைப் பற்றி திட்டமிட பருவ கால மாறுபாடுகள் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை ஆகும்.

பருவ கால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதன் நோக்கமானது அவற்றின் விளைவுகளைப் பற்றி அறிந்து மற்றும் அதன் விளைவைப் போக்கினின்று வேறுபடுத்துதல் ஆகும்.

பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிடுதல் :

பருவ கால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதில் பின்வரும் நான்கு முறைகளும் அதிக அளவு பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

1. எளிய சராசரி முறை
2. போக்கு விகித முறை
3. நகரும் சராசரி விகித முறை
4. தொடர் உறவு முறை

மேற்கண்ட நான்கு முறைகளில் பருவ கால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதற்கு எளிய சராசரி முறை மிக சுலபமானது.

எளிய சராசரி முறை :

இந்த முறையில் பருவ கால குறியீட்டை கணக்கிடுவதற்கான படிகள்

i) கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை கால வாரியாக வரிசைபடுத்துக.

ii) ஒவ்வாரு பருவத்திற்கும் சராசரி கணக்கிடுக.

iii) பருவ கால சராசரிகளின் சராசரியை கணக்கிட வேண்டும். இது மொத்த சராசரி ஆகும்.

iv) பருவ கால சராசரியை மொத்த சராசரியின் சதவீதத்தில் எழுதுக. இது பருவ காலக் குறியீடு ஆகும்.

இப்பருவ கால குறியீடுகளின் மொத்தம் 100n. இங்கு 'n' என்பது ஒரு வருடத்தில் உள்ள பருவங்களின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9

கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு எளிய சராசரி முறையில் பருவ கால குறியீடுகள் காண்க.

காலாண்டு

வருடம்	I	II	III	IV
1989	30	40	36	34
1990	34	52	50	44
1991	40	58	54	48
1992	54	76	68	62
1993	80	92	86	82

தீர்வு

காலாண்டு

வருடம்	**I**	**II**	**III**	**IV**
1989	30	40	36	34
1990	34	52	50	44
1991	40	58	54	48
1992	54	76	68	62
1993	80	92	86	82
மொத்தம்	238	318	294	270
சராசரி	47.6	63.6	58.8	54
பருவகால குறியீடுகள்	**85**	**113.6**	**105**	**96.4**

மொத்த சராசரி $= \dfrac{47.6+63.6+58.8+54}{4}$

$= \dfrac{224}{4} = 56$

முதல் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$\frac{\textbf{முதல் காலாண்டு சராசரி}}{\textbf{மொத்த சராசரி}} \times \mathbf{100}$$

$$= \frac{47.6}{56} \times 100 = 85$$

இரண்டாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$\frac{\textbf{இரண்டாவது காலாண்டு சராசரி}}{\textbf{மொத்த சராசரி}} \times \mathbf{100}$$

$$= \frac{63.6}{56} \times 100 = 113.6$$

மூன்றாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$\frac{\textbf{மூன்றாவது காலாண்டு சராசரி}}{\textbf{மொத்த சராசரி}} \times \mathbf{100}$$

$$= \frac{58.5}{56} \times 100 = 105$$

நான்காவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$\frac{\textbf{நான்காவது காலாண்டு சராசரி}}{\textbf{மொத்த சராசரி}} \times \mathbf{100}$$

$$= \frac{54}{56} \times 100 = 96.4$$

எடுத்துக்காட்டு 10

பின்வரும் விவரங்களுக்கு எளிய சராசரி முறையில் பருவகால குறியீடுகளைக் காண்க.

வருடம்

காலாண்டு	1974	1975	1976	1977	1978
I	72	76	74	76	74
II	68	70	66	74	74
III	80	82	84	84	86
IV	70	74	80	78	82

தீர்வு

காலாண்டு

வருடம்	**I**	**II**	**III**	**IV**
1974	72	68	80	70
1975	76	70	82	74
1976	74	66	84	80
1977	76	74	84	78
1978	74	74	86	82
மொத்தம்	372	352	416	384
சராசரி	74.45	70.4	83.2	76.8
பருவகால குறியீடுகள்	**97.6**	**92.4**	**109.2**	**100.8**

மொத்த சராசரி $= \frac{74.4+70.4+83.2+76.8}{4}$

$$= \frac{304.8}{4} = 76.2$$

முதல் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$\frac{\textbf{முதல் காலாண்டு சராசரி}}{\textbf{மொத்த சராசரி}} \times \mathbf{100}$$

$$= \frac{74.4}{76.20} \times 100 = 97.6$$

இரண்டாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$\frac{\textbf{இரண்டாவது காலாண்டு சராசரி}}{\textbf{மொத்த சராசரி}} \times \mathbf{100}$$

$$= \frac{70.4}{76.2} \times 100 = 92.4$$

மூன்றாவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$\frac{\textbf{மூன்றாவது காலாண்டு சராசரி}}{\textbf{மொத்த சராசரி}} \times \mathbf{100}$$

$$= \frac{83.2}{76.2} \times 100 = 109.2$$

நான்காவது காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு =

$$\frac{\textbf{நான்காவது காலாண்டு சராசரி}}{\textbf{மொத்த சராசரி}} \times \mathbf{100}$$

$$= \frac{76.8}{76.2} \times 100 = 100.8$$

= 97.6 + 92.4 + 109.2 + 100.8

= 400 எனவே சரிபார்க்கப்பட்டது.

சுழல் மாறுபாடுகள் :

வழக்கமாக இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட ஆண்டுகளில் காலத் தொடர் வரிசையில் திரும்ப திரும்ப ஏற்படும் மாறுபாடுகளை ‘‘சுழல்கள்’’ என்ற பதம் குறிக்கிறது. வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரத்துடன் தொடர்புடைய காலத் தொடர் வரிசைகள் யாவும் சுழல் மாறுபாடுகளைப் பெற்றிருக்கும். வணிக செயல்பாடுகள் திரும்ப, திரும்ப ஏற்ற இறக்க

அசைவுகளைப் பெறுவதே வியாபார சுழற்சியாகும். இச்சுழற்சி நான்கு பகுதிகளைக் கொண்டது. அவையாவன 1. அபிவிருத்தி

2. பின்னடைவு

3. வீழ்ச்சி

4. மீட்சி

ஒவ்வொரு நிலையும் மெதுவாக மாறி மற்றொரு நிலையை அடைகிறது. ஒரு வியாபாரத்தை நிலை நிறுத்தத் தேவையான கொள்கை மாற்றங்களை உருவாக்குவதற்கு சுழல் மாறுபாடுகளைப் பற்றி அறிந்து கொள்வது மிக அவசியமாகிறது. வியாபாரிகள் அவர்களுடைய வணிகத்தின் வளர்ச்சி மற்றும் வீழ்ச்சி நிலைக் கேற்றவாறு அவர்களுடைய வியாபாரத்தை நிலைநிறுத்த தக்க நடவடிக்கைகள் எடுக்க சுழல் மாறுபாடுகள் உதவுகின்றன.

ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் :

ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் முறையற்ற மாறுபாடுகள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன. இம்மாறுபாடுகள் முறையானவை அல்ல. இவை குறிப்பிட்ட வடிவத்தில் மீண்டும் மீண்டும் நிகழாது. இம்மாறுபாடுகள் திடீரென ஏற்படும் போர், நிலநடுக்கம், வேலை நிறுத்தம், வெள்ளம் மற்றும் புரட்சி போன்றவற்றால் ஏற்படுகின்றன. இம்மாறுபாடு ஒரு குறுகிய கால மாறுபாடு ஆகும். ஆனால் இது காலத் தொடர் வரிசையின் எல்லாப் பகுதிகளையும் பாதிக்கிறது. இம்முறையற்ற மாறுபாடுகளை அளவிடவோ, தனித்துப் பிரித்துக் கூறவோ எந்தவித புள்ளியியல் முறைகளும் இல்லை. ஒரு முறையான தொடர்புடைய பகுதிகள் அனைத்தையும் நீக்கிய பிறகு எஞ்சுகின்ற பகுதியே ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகளைக் குறிக்கிறது.

பயிற்சி வினாக்கள்

1. காலம் சார் தொடர் வரிசை என்றால் என்ன?
2. ஒரு காலம் சார் தொடர் வரிசையின் பல்வேறு கூறுகளை விவரிக்கவும்.
3. காலம் சார் தொடர் வரிசைப் பகுப்பாய்வில் நீண்டகாலப் போக்கை நிர்ணயிக்கும் ஒரு முறையினை விவரிக்கவும்.
4. நகரும் சராசரி முறையின் நிறைகள் மற்றும் குறைகள் யாவை?
5. பருவகால மாறுபாடு பற்றி விளக்குக
6. குறைந்த வர்க்க முறையின் கீழ் ஒரு நேர்கோட்டின் போக்கினை பொருத்துக? மேலும் 1990க்கான மதிப்பை கணக்கிடுக

ஆண்டு	:	1981	1982	1983	1984	1985
உருவாக்கப்படும் பொருள் குலிண்டாரில்	:	15	16.5	18	20.5	25

Y=19+2.4x
Production for 1990 = 35.8

7. ஐந்தாண்டு நகரும் சராசரி முறையில் நீண்டகாலப் போக்கு காண்க

ஆண்டு	:	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
செலவு	:	50	36	43	44	38	38	32	38	41

(42.2, 39.8, 39, 38, 37.4)

8. குறைந்த வர்க்க முறையின் கீழ் ஒரு நேர்க்கோட்டின் போக்கினைப் பொருத்துக மற்றும் 2012க்கான நிகர லாபத்தினை கணக்கிடுக. நிகர லாபத்தின் ஓராண்டின் தொகை மாறுதல் யாது

ஆண்டு	:	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
நிகர லாபம் (ரூ.கோடியில்)	:	32	36	44	37	71	72	109

Y=21.92+11.79x
Profit for 2012=116.24

9. ஐந்து ஆண்டு நகரும் சராசரி முறையில் நீண்ட காலப் போக்கு காண்க

உற்பத்தி	:	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
வருடம்	:	351	366	361	362	400	419	410	420	450	500	518

(368,381.6, 390.4, 402.2, 419.8, 439.8, 459.6)

10. குறைந்த வர்க்க முறையின் கீழ் ஒரு நேர்கோட்டின் போக்கினை பொருத்துக மற்றும் 2004ம் ஆண்டிற்கான மதிப்பைக் கணக்கிடுக

ஆண்டு	:	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
உருவாக்கப்படும் இரும்பு	:	60	72	75	65	80	85	95

Y=61.429+4.857x
Production for 2004=95.428

11. நான்காண்டு நகரும் சராசரி முறையில் நீண்டகாலப் போக்கு காண்க

ஆண்டு	:	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
மாணவர் எண்ணிக்கை	:	37.4	31.1	38.7	39.5	47.9	42.6	48.4	64.6	58.4	38.6	51.4	84.4

(37.98, 40.74, 43.39, 47.74, 52.19, 53, 52.88, 55.73)

12. குறைந்த வர்க்க முறையின் கீழ் ஒரு நேர்கோட்டின் போக்கினை பொருத்துக மற்றும் 2014க்கான நிகர லாபத்தினைக் காண்க

ஆண்டு	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
நிகர லாபம் கோடியில்	35	40	38	44	37	100	89

Y=24.605+10.035x
Profit for 2014=104.885

அறிமுகம்

ஆயத்தொலை வடிவக்கணிதம் அல்லது பகுமுறை வடிவக்கணிதம் என்பது, எண்களாலான அச்சு தூரங்களின் வரிசை சோடிகளின் மூலம் தளத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகளை விவரிப்பதே. இம்முறையை அறிமுகப்படுத்தி அதன்மூலம் புள்ளிகளைக் குறிக்கும் முறையை விவரித்தவர் ரேனே டேகார்ட் என்ற பிரெஞ்சு நாட்டுக் கணித வல்லுநர் ஆவார். அவர் இதே முறையை கொண்டு வளைவரைகளையும், கோடுகளையும் சமன்பாடுகளின் மூலம் விவரிக்க முடியும் என்று எடுத்துரைத்தார். இவரே வடிவியலையும் இயற்கணிதத்தையும் முதன் முதலில் இணைத்து பார்த்தவர். இந்த கண்டுபிடிப்புகளுக்காக அவரைக் கௌரவப்படுத்தும் விதமாக, ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவுகளைக் (அச்சுத்தூரங்களை) ”கார்டீசியன்” அச்சுத்தூரங்கள் எனவும், அச்சு தளங்களைக் “கார்டீசியன் அச்சுத்தளங்கள்” எனவும் அழைக்கின்றோம். பகுமுறை வடிவக்கணிதத்தின் கண்டுபிடிப்பு நவீன கணிதத்தின் ஆரம்பமாகக் கருதப்படுகின்றது.

பிரிவுச் சூத்திரம; (Section Formula)

Internal division

A(x_1, x_2) , B (y_1, y_2) என்ற இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை உட்புறமாக m:n என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி

$(x, y) = \left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$ ஆகும்.

External division

A(x_1, x_2) , B (y_1, y_2) ஆகிய இரு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை P என்ற புள்ளி வெளிப்புறமாக என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், அப்புள்ளி P ,

$(x, y) = \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

(3 , 5) , (8 , 10) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

$A(3,5)$, $B(8,10)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை உட்புறமாக 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P(x,y)$ என்க.

$$p(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

$$p(x,y) = \left(\frac{2(8)+3(3)}{2+3}, \frac{2(10)+3(5)}{2+3}\right)$$

$$p(x,y) = \left(\frac{16+9}{5}, \frac{20+15}{5}\right)$$

$$p(x,y) = \left(\frac{25}{5}, \frac{35}{5}\right)$$

$$p(x,y) = (5,7)$$

எடுத்துக்காட்டு 2

(2 , 1), (3 , 5) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை வெளிப்புறமாக 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

$$(x,y) = \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

$$p(x,y) = \left(\frac{2(3)-3(2)}{2-3}, \frac{2(5)-3(1)}{2-3}\right)$$

$$p(x,y) = \left(\frac{6-6}{-1}, \frac{10-3}{-1}\right)$$

$$p(x,y) = \left(\frac{0}{-1}, \frac{7}{-1}\right)$$

$$p(x,y) = (0,-7)$$

நடுப்புள்ளி

$\mathrm{A}(x_1, y_1)$ மற்றும் $B\ (x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி

$$(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

நடுக்கோட்டு மையம்

முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் என்பது நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியாகும். $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ $B\ (x_2, y_2)$ மற்றும் c $(x_3 y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம்

$$(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

(3,0) , (-1,4) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு

$$M(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M(x,y) = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$$

$$M(x,y) = \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) = M(1,2)$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

$A(4, -6)$ $B\ (3, -2)$ மற்றும் c $(5,2)$ ஆகியவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.

தீர்வு

$$(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

$$(x,y) = \left(\frac{4+3+5}{3}, \frac{-6+-2+2}{3}\right)$$

$$(x,y) = (4, -2)$$

இரு புள்ளிகளின் இடைப்பட்ட தொலைவு

$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயான தொலைவைக் காணும் சூத்திரம்

AB = $\sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$

எடுத்துக்காட்டு 5:

(-4, 0) மற்றும் (3, 0) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு

d = $\sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$

AB = $\sqrt{(3 - -4)^2 + (0 - 0)^2}$

AB = $\sqrt{(7)^2 + (0)^2}$

AB = $\sqrt{49}$

AB = 7

எடுத்துக்காட்டு 6

(4, 2), (7, 5) மற்றும் (9, 7) என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது அமையும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

d = $\sqrt{(\boldsymbol{x_2 - x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2 - y_1})^2}$

$AB^2 = (4-7)^2 + (2-5)^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 9+9 = 18$

$BC^2 = (9-7)^2 + (7-5)^2 = (2)^2 + (2)^2 = 4+4 = 8$

$AC^2 = (9-4)^2 + (7-2)^2 = (5)^2 + (5)^2 = 25+25 = 50$

எனவே, $AB = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$; $BC = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$;

$CA = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$

இங்கு $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ AC எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 7:

A (–3, –4), B (2, 6) மற்றும் C (–6, 10) என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகுமா எனத் தீர்மானிக்க.

தீர்வு

$d = \sqrt{(\boldsymbol{x_2 - x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2 - y_1})^2}$

$AB^2 = (2- -3)^2 + (6 - -4)^2 = (5)^2 + (10)^2 = 25+100 = 125$

$BC^2 = (-6-2)^2 + (10-6)^2 = (-8)^2 + (4)^2 = 64+16 = 80$

$AC^2 = (-6 - -3)^2 + (10- -4)^2 = (-3)^2 + (14)^2 = 9+196 = 205$

$\therefore\ AB^2 + BC2 = 125 + 80 = 205 = CA^2$

ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் என்பதால், ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8:

(a, a), $(-a, -a)$ மற்றும் $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$d = \sqrt{(\boldsymbol{x_2 - x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2 - y_1})^2}$

AB $=\sqrt{(-a-a)^2 + (-a-a)^2}$

$=\sqrt{(-2a)^2 + (-2a)^2}$

$=\sqrt{4\,a^2 + 4\,a^2}$

$= \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2a}$

BC$=\sqrt{\left(-a\sqrt{3} - -a\right)^2 + \left(a\sqrt{3\,-}- a\right)^2}$

$=\sqrt{\left(-a\sqrt{3} + a\right)^2 + \left(a\sqrt{3+a}\right)^2}$

$=\sqrt{3a^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{3} + 3a^2 + a^2 + 2a^2\sqrt{3}}$

$\sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2a}$

AC$= \sqrt{\left(a - -a\sqrt{3}\right)^2 + \left(a - a\sqrt{3}\right)^2}$

$=\sqrt{a^2 + 2a^2\sqrt{3} + 3a^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{3} + 3a^2}$

$= \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2a}$

$\therefore$ AB = BC= AC

அனைத்து பக்கங்களும் சமமானதால், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 9:

(-7, -3), (5, 10), (15, 8) மற்றும் (3, -5)என்ற புள்ளிகளை, வரிசைமாறாமல் எடுத்து கொண்டால், அவை ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும் என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு

$d = \sqrt{(\boldsymbol{x_2 - x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2 - y_1})^2}$

$AB^2 = (5 - -7)^2 + (10 - -3)^2 = (12)^2 + (13)^2 = 144+169 = 313$

$BC^2 = (15-5)^2 + (8-10)^2 = (10)^2 + (-2)^2 = 100+4 = 104$

$CD^2 = (3-15)^2 + (-5 - 15)^2 = (-12)^2 + (-13)^2 = 144+196 = 313$

$DA^2=(3--7)^2+(-5--3)^2=(10)^2+(-2)^2=100+4=104$

எனவே, AB=CD= $\sqrt{313}$ மற்றும் BC=DA= $\sqrt{104}$ என்பதால்

எதிர் பக்கங்கள் சமம். எனவே, $ABCD$ ஓர் இணைகரமாகும்

எடுத்துக்காட்டு 10:

(3, –2), (3, 2), (–1, 2) **மற்றும்** (–1, –2) என்ற புள்ளிகளை வரிசை மாறாமல் எடுத்துக்கொண்டால் அவை ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாகும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு

d = $\sqrt{(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1})^2+(\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1})^2}$

$AB^2=(3-3)^2+(2--2)^2=(0)^2+(4)^2=0+16=16$

$BC^2=(3+1)^2+(2-2)^2=(4)^2+(0)^2=16+0=16$

$CD^2=(-1+1)^2+(2+2)^2=(0)^2+(4)^2=0+16=16$

$DA^2=(-1-3)^2+(-2--2)^2=(-4)^2+(0)^2=16+0=16$

$AB = BC = CD = DA = \sqrt{16} = 4$

எனவே, அனைத்து பக்கங்களும் சமம்.

$AC^2=(-1-3)^2+(2--2)^2=(-4)^2+(4)^2=16+16=32$

$BD^2=(-1-3)^2+(-2-2)^2=(-4)^2+(-4)^2=16+16=32$

AC=BD=$\sqrt{32}$ =4$\sqrt{2}$ எனவே, மூலைவிட்டங்கள் சமம்.

ஆகவே, A, B, C **மற்றும்** D என்ற புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தை அமைக்கும்.

II SLOPE OF A STRAIGHT LINE

சாய்வு என்பது X அச்சை அடிப்படையாக கொண்டு ஒரு கோட்டுத்துண்டு எந்த அளவு சாய்ந்துள்ளது என்பதை குறித்து கணக்கிடுவதாகும். சாய்வுடன் கூடிய ஒரு கோட்டுத்துன்டை மூலவிட்டங்களாக கருதி ஒரு செவ்வகமோ அல்லது சதுரமோ வரையமுடியும். அவ்வாறு வரையப்படும் வடிவத்தின் செங்குத்து பகுதிக்கும் படுக்கிடை பகுதிக்கும் உள்ள விதிகமே சாய்வு என்று கணக்கிடுகிறோம்.

AB என்ற கோட்டுத்துண்டு படத்தில் காட்டியவாறு இருந்தால் சாய்வு மிகை விகிதமா (Positive) இருக்கும். AB என்ற கோட்டுத் துண்டு எதிர்மாறாக (Anti Clockwise) இருந்தால் சாய்வு குறை விகிதமாக (Negative) இருக்கும் ஒரு கோட்டுத்துண்டின் சமன்பாடு கண்டறியும் போது சாய்வு

(Slope) முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. பொதுவாக சாய்வு m என்ற குறியிட்டில் அழைக்கப்படுகிறது. சாய்வுகளை அளவிட பின்வரும் சூத்திரங்கள் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

Formulae

1. Slope of the line joining two points

இரண்டு புள்ளிகள் கொடுத்திருந்தால்

$$m = \frac{\mathrm{y2-y1}}{\mathrm{x2-x1}}$$

2. Slope of the line which is parallel to X axis

கோட்டுத்துண்டு X அச்சுக்கு இணையாக சென்றால்

$$m = \frac{\mathrm{y-y}}{\mathrm{x2-x1}} = \frac{0}{x2-x1} = 0$$

3. Slope of the line which is Parallel to y axis

கோட்டுத்துண்டு y அச்சுக்கு இணையாக சென்றால்

$$m = \frac{\mathrm{y2-y1}}{\mathrm{x-x}} = \frac{\mathrm{y2-y1}}{0} = 0$$

4. Slope of the line joining the origin and any point

கோட்டுத்துண்டு ஆதிப்புள்ளியில் (0,0) இருந்து எதாவது ஒரு புள்ளிக்கு செல்லுமானால்

$$m = \frac{\mathrm{y1}}{\mathrm{x1}}$$

5. Slope of the equation

சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

a = co-efficient of X

$$m = \frac{-\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

b =co-efficient of y

எடுத்துக்காட்டு 11.

Find the slope of the lines joining the points

கீழ்கண்டவைகளுக்கு சாய்வை கணக்கிடவும்.

i) (-1, 3 and (2,5)

ii) (-21) and (1,3)

iii) (1/2, 3/2 and (-2, 1/2)

iv) (2,0) and (0,-3)

தீர்வு

Formula $m = \frac{\text{y2}-\text{y1}}{\text{x2}-\text{x1}}$

i) Let A = (-1, 3) and B = (2,5)

x_1 y_1 x_2 y_2

Slope of the line AB $= \frac{5-3}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$

ii) Let A = (-2,-1) and B = (1,3)

Slope of the line AB $= \frac{3-(-1)}{1-(-2)} = \frac{4}{3}$

iii) Let A = (1/2, 3/2) and B = (-2, 1/2)

Slope of the line AB $= \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{-2-\frac{1}{2}}$

$= \frac{\frac{1-3}{2}}{\frac{-4-1}{2}} = \frac{\frac{-2}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{2} \text{ x } \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

iv) Let A = (2,0) and B = (0,-3)

Slope of the line AB $= \frac{-3-0}{0-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 12

Find the Slope of the line joining the points

கீழ்கண்டவைகளுக்கு சாய்வை கணக்கிடவும்

i) (-3,2) and (4,2)

ii) (2,5) and (2,3)

iii) (0,0) and (1,2)

தீர்வு

i) Let A = (-3,2) and B = (4,2)

Slope of the line AB $= \frac{2-2}{4-(-3)} = \frac{0}{7} = 0$

விடை 0 வந்தால் கோட்டுத்துண்டு X அச்சுக்கு இணையாக செல்கிறது என்று அறிந்து கொள்ள வேண்டும்.

ii) Let A = (2,5) and B = (2,3)

Slope of the line AB = $\frac{3-5}{2-2} = \frac{-2}{0} = \infty$

விடை ∞ (infinite) வந்தால் கோட்டுத்துண்டு Y அச்சுக்கு இணையாக செல்கிறது என்று அறிந்து கொள்ள வேண்டும்.

iii) Let O = (0,0) and P= (1,2)

Slope of the line OP = $\frac{2}{1}$ = 2

கோட்டுத்துண்டு ஆதிப்புள்ளியில் (origin) இருந்து செல்வதால் $\frac{y1}{x1}$ என்ற சூத்திரம் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 13

Find the slope of the equation of the lines

i) 2X + 5y-4 = 0

ii) X – 4y =3

iii) y = X+1

iv) KX + 2y -1=0

தீர்வு

Formula : $m = \frac{-a}{b}$ a = co-efficient of X

b = co-efficient of y

i) 2X +5y-4=0 a=2

$m = \frac{-2}{5}$ b=5

ii) X-4y =3 a=1

$m = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$ b=-4

iii) y = X+1 a=-1

-X+y =1 b=1

$m = \frac{-(-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$

iv) KX + 2y-1=0 a=k

m= $\frac{-k}{2}$ b=2

எடுத்துக்காட்டு 14

Show that the points (2,-4), (4,-2) and (7,1) are colllinear கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் செல்கின்றதா என் காண்க

Let A = (2,-4) B = (4,-2) and C = (7,1)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் செல்கிறதா என ஆராய வேண்டும் என்றால் கோட்டுத்துண்டு AB யின் சாய்வு BC யின் சாய்வுக்கு சமமாக இருக்க வேண்டும்.

தீர்வு

Slope of AB $= \frac{-2-(-4)}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$

Slope of BC $= \frac{1-(-2)}{7-4} = \frac{3}{3} = 1$

Slope of A,B and C lie on the same line they are collinear

எடுத்துக்காட்டு 15

Find the value of K if the points (K,3) (-6,4) and (-10,5) are collinear

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் சென்றால் “K” ன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு

Let A = (K,3) B = (-6,4) and C = (-10, 5)

When A, B and C are collinear

Slope of AB = Slope of BC

$$\frac{4-3}{-6-K} = \frac{5-4}{-10-(-6)}$$

$$\frac{1}{-6-K} = \frac{1}{-4}$$

Cross multiplying

-6-k = -4

-k = -4+6

-k=2

k=-2

எடுத்துக்காட்டு 16

Show that the line joining the points (-2,3) and (4,2) is parallel to the line joining the points (3,4) and (-3,5).

(-2,3), (4,2) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டு (3,4) , (-3,5) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டுக்கு இணையாக செல்கிறதா என சரிபார்க்க.

தீர்வு

Let A = (-2,3) B= (4,2)

C= (3,4) D = (-3,5)

AB யின் சாய்வும் CD யின் சாய்வும் சமமாக இருந்தால் இரண்டு கோட்டுத்துண்டும் இணையாக செல்கிறது என்று அறியலாம்.

Slope of AB = m1 $\frac{2-3}{4-(-2)} = \frac{-1}{6} = \frac{1}{6}$

Slope of CD = m2 $= \frac{5-4}{-3-3} = \frac{1}{-6} = -\ \frac{1}{6}$

m1=m2 Proved

Hence the line AB is Parallel to the line CD

எடுத்துக்காட்டு 17

If the line joining the points (3,2) and (2,-3) is Parallel to the line joining the points (4,3) and (2,k) Find the value of K.

(3,1), (2,-3) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டு (4,3,) (2,k) என்ற கோட்டுத்துண்டுக்கு இணையாக சென்றால் “K” ன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு

Let A = (3,2) B= (2,-3)

C= (4,3) D= (2,k)

Slope of AB = Slope of CD

$$\frac{-3-2}{2-3} = \frac{K-3}{2-4}$$

$$\frac{-5}{-1} = \frac{K-3}{2}$$

Cross Multiplying

(-1) (K-3) = -2 x (-5)

-K + 3 = 10

-K = 10-3

-K =7

K = -7

எடுத்துக்காட்டு 18

Show that the line joining the points (3,-4 and (2,1) is perpendicular to the line joining the points (2,2) and (3,3)

(3,-4) (2,1) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டு (-2,2), (3,3) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டுக்கு செங்குத்தாக உள்ளதா என ஆராய்க

தீர்வு

A= (3,1) B = (2,1)

C= (-2,2) D =(3,3)

AB யின் சாய்வையும் CD யின் சாய்வையும் பெருக்கினால் -1 வரவேண்டும் அவ்வாறு வந்தால் AB என்ற கோட்டுத்துண்டுக்கு செங்குத்தாக CD கோட்டுத்துண்டு செல்கிறது என அறியலாம்.

Slope of AB = m1 = $\frac{1(-4)}{2-3}$ =$\frac{5}{-1}$ = 5

Slope of CD = m2 =$\frac{3-2}{3-(-2)}$ = $\frac{1}{5}$

m1 x m2 = -5 x $\frac{1}{5}$ = -1 Proved.

Hence the line AB is perpendicular to the line CD.

எடுத்துக்காட்டு 19

If the line joining the points (-3,4) and (2,-3) is perpendicular is the line joining the points (3,k) and (2,-3), Find the value of K.

(-3,4), (2,-3) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டு (3,K), (2,-3) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டுக்கு செங்குத்தாக சென்றால் “K” ன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு

Let A = (-3,4) B= (2,-3)

C= (3,k) D = (2,-3)

Slope of AB = m1 = $\frac{-3-4}{2-(-3)}$ = $\frac{-7}{5}$

m1 x m2 = -1

$\frac{-7}{5}$ x m2 = -1

m2 = -1 x $\frac{5}{7}$

$\frac{5}{7} = \frac{-3-k}{-2-3}$

$\frac{5}{7} = \frac{-3-k}{-1}$

Cross multiplying

7x (-3-k) = -1x5

-21 -7k = -5

-7k = -5+21

-7K = 16

K =$\frac{-16}{7}$

எடுத்துக்காட்டு 20

If the line AB is perpendicular to the line CD and the slope of AB = $\frac{-5}{4}$ find the slope of CD

AB என்ற கோட்டுத்துண்டு CD க்கு செங்குத்தாக செல்கிறது. AB யின் சாய்வு $\frac{-5}{4}$ எனில் CD யின் சாய்வு என்ன?

தீர்வு

m1 = $\frac{-5}{4}$ m2 =?

m1 x m2 = -1

$\frac{-5}{4}$ x m2 = -1

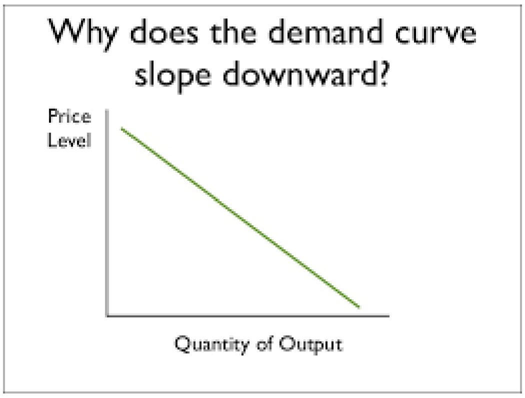
m2 = -1 x $\frac{-4}{5}$ = $\frac{4}{5}$

Slope of CD = $\frac{4}{5}$

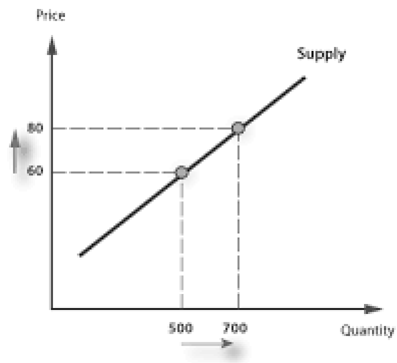
தேவை மற்றும் அளிப்பு

தேவை மற்றும் அளிப்பு ஆகியவை நடைமுறை வணிகத்தில் முக்கியத்துவம் பெறுகிறது. பொதுவாக விலை அதிகரிக்கும் போது பொருள்களின் தேவை குறைகிறது. அதேபோல் விலை குறையும் போது பொருள்களின் தேவை அதிகமாகிறது. இந்நிலையை தேவை விதி எனக் கூறுகிறோம். வரைபடத்தின் உதவியால் தேவைக்கோடு வரைந்தால்

அதனுடைய சாய்வு எதிர்திசையில் இருப்பதால், சாய்வு குறை எண்ணில் மதிப்பிடப்படும். தேவை விதியின் பின்வரும் படத்தின் மூலம் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

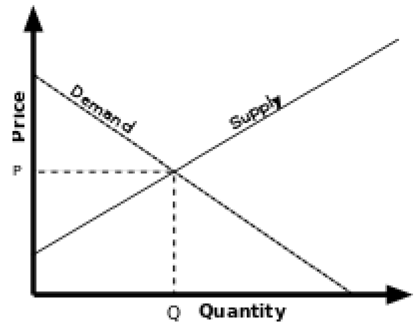


அதேபோல் அளிப்பு விதியை குறிப்பிடுவதென்றால் பொருள்களின் விலை குறைவாக இருக்கும் போது அளிப்பு குறைவாக இருக்கிறது. விலை அதிகரிக்கும் போது அளிப்பும் அதிகரிக்கிறது. அதனால் அளிப்புக் கோட்டின் சாய்வு நேர் திசையில் உள்ளது. சாய்வும் மிகை எண்ணில் மதிப்பிடப்படுகிறது. அளிப்பு விதியினை பின்வரம் படத்தின் மூலம் தெரிந்துகொள்ளலாம்.



சந்தை சமநிலை :

தேவைக்கோடு மற்றும் அளிப்புக்கோடு இரண்டும் சந்திக்கும் புள்ளியே சந்தை சமநிலை என அழைக்கிறோம். இப்புள்ளியில் உள்ள விலையும், அளவும் தேவை மற்றும் அளிப்பு ஆகியவற்றை சமநிலைப்படுத்துகிறது. பின்வரும் படத்தின் மூலம் இதனை தெளிவாக தெரிந்துகொள்ளலாம்.



அடக்கவிலைக்கும் உற்பத்திக்கும் உள்ள ஒற்றுமையை குறித்து படிப்பதே இம்முறையாகும். இதனை சமன்பாடு வடிவில் கூறமுடியும். உதாரணமாக y=5x+1000 என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். X என்பது Output Quantity என வைத்துக்கொண்டால் y என்பது Cost of production (தயாரிப்பு செலவு) என்று கூறுகிறோம். X = 100 units என எடுத்துக்கொண்டால், குறிப்பிட்டுள்ள சமன்பாட்டில் இந்த எண்ணை நாம் உபயோகித்தால் y=1500 என பெறமுடியும். அப்படியென்றால் 100 எண்ணங்களை உற்பத்தி செய்ய மொத்த செலவு (Total cost) 1500 செலவாகிறது. அனால் சமன்பாட்டில் குறிப்பிட்டுள்ள 1000 என்பது நிலையான செலவாகவும் (Fixed Cost) 5 என்பது மாறுபடும் செலவாகவும் (Variable Cost) நாம் கருதலாம். மேலும் 1500 மொத்த செலவை தயாரிப்பு எண்ணிக்கையால் வகுத்தால் கிடைப்பது சராசரி செலவு (Average cost) என கூற வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு :21

ஒரு மேஜையின் விலை ரூ.500 இருக்கும் போது 15 மேஜைகள் விற்பனையாகிறது. ஒரு மேஜையின் விலை ரூ.400 இருக்கும் போது 25 மேஜைகள் விற்பனையாகிறது. மேற்கூறிய நிலைகளுக்கு ஒற்றுமை இருக்குமாயின் தேவைக்கோட்டின் சமன்பாடு தருக.

தீர்வு

Let

X= demand	Y= price
15	500
25	400

Demand curve points are (15, 500) (25, 400)
$X_1, Y_1 \quad X_2, Y_2$

Equation formula

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$(y - 500) = \frac{400 - 500}{25 - 15}\ (x - 15)$$

$$(y - 500) = \frac{-100}{10}\ (x - 15)$$

$$(y - 500) = -10\ (x - 15)$$

$$(y - 500) = -10x + 150$$

10x+y=150+500

10x+y=650

The demand curve equation is 10x+y=650

எடுத்துக்காட்டு:22

ஒரு ரேடியோவின் விலை ரூ.500 இருக்கும் போது 50 ரேடியோ விற்பனைக்கு கிடைக்கிறது. ஒரு ரேடியோவின் விலை ரூ.600 இருக்கும் போது 75 ரேடியோ கிடைக்கிறது. மேற்கூறியவைகளுக்கு ஒற்றுமை இருக்குமாயின் அளிப்பு கோட்டின் சமன்பாடு தருக. மேலும் 100 ரேடியோ விற்பனைக்கு கிடைக்குாயின் ஒரு ரேடியோ விலை என்னவாக இருக்கும்?

தீர்வு

Let

X= supply	Y= price
50	500
75	600
100	?

Supply curve points are (50, 500) (75, 600)
$X_1,\ Y_1\quad X_2,\ Y_2$

Equation formula

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1)$$

$$(y - 500) = \frac{600 - 500}{75 - 50}\ (x - 50)$$

$$(y - 500) = \frac{100}{25}\ (x - 50)$$

$$(y - 500) = 4\ (x - 50)$$

$(\boldsymbol{y}-\mathbf{500})=\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{200}$

$\boldsymbol{y}$ **= 4x-200+500**

$\boldsymbol{y}$ **= 4x+300**

The supply curve equation is y = 4x+300

When x = 100

y = 4(100)+300

y=700

If 100 Radios are made available the expected price per Radio is Rs 700

எடுத்துக்காட்டு 23

ஒரு நிறுவனம் 200 பொருளை தயாரிப்பதற்கு மொத்த செலவு ரூ.730 ஆகிறது. 500 பொருளை தயாரிப்பதற்கு மொத்த செலவு ரூ.970 ஆகிறது. மேற்கூறிய விபரங்களுக்கு ஒற்றுமை இருப்பின் அடக்கவிலைக்கோடு சமன்பாடு கண்டுபிடித்து அதன்மூலம் 400 பொருளை தயாரிப்பதற்கு மொத்த செலவு என்ன என்பதை கணிக்கவும்.

தீர்வு

Let

X= units	Y= cost
200	730
500	970
400	?

Cost curve points are (200, 730) (500, 970)

$X_1, \quad Y_1 \quad X_2, \quad Y_2$

Equation formula

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1)=\frac{\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1}{\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)$$

$$(\boldsymbol{y}-\mathbf{730})=\frac{\mathbf{970}-\mathbf{730}}{\mathbf{500}-\mathbf{200}}\,(\boldsymbol{x}-\mathbf{200})$$

$$(\boldsymbol{y}-\mathbf{730})=\frac{\mathbf{240}}{\mathbf{300}}\,(\boldsymbol{x}-\mathbf{200})$$

$$(\boldsymbol{y}-\mathbf{730})=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\,(\boldsymbol{x}-\mathbf{200})$$

$\mathbf{5}(\boldsymbol{y}-\mathbf{730})=\mathbf{4}(\boldsymbol{x}-\mathbf{200})$

5y-3650= 4x-800

-4x+5y=-800+3650

-4x+5y=2850

The cost curve equation is -4x+5y=2850

When x=400

-4(400)+5y=2850

-1600+5y= 2850

5y=2850+1600

5y=4450

Y=$\mathbf{\frac{4450}{5}}$

Y=890

எடுத்துக்காட்டு 24

ஒரு உணவகத்தில் மொத்த செலவுகள் (y) ஒரு பகுதி நிலையான செலவுகளாகவும், மீதி செலவுகள் நபர்களை பொறுப்பு மாறுபடுவதாகவும் உள்ளது. மொத்த செலவுகள் ரூ.1040 ஆக இருக்கும் போது 12 நபரும், மொத்த செலவுகள் ரூ.1600 ஆக இருக்கும் போது 20 நபரும் பிரித்துக்கொள்கின்றனர்.

1) yக்கும் xக்கும் உள்ள ஒற்றுமையை குறிக்கும் சமன்பாடு தருக.

2) நிலையான செலவு மற்றும் ஒரு நபருக்கு ஆகும் மாறுபடும் செலவு காண்க.

தீர்வு

Let

X= supply	Y= price
12	1040
20	1600

Equation points are (12, 1040) (20, 1600)
$X_{1},\quad Y_1 \quad X_{2},\quad Y_2$

Equation formula

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_1}) = \frac{\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1}}{\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1}}\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1})$$

$$(\boldsymbol{y}-\mathbf{1040}) = \frac{\mathbf{1600}-\mathbf{1040}}{\mathbf{20}-\mathbf{12}}\ (\boldsymbol{x}-\mathbf{12})$$

$$(\boldsymbol{y-1040}) = \frac{\mathbf{560}}{\mathbf{8}}\ (\boldsymbol{x-12})$$

$$(\boldsymbol{y-1040}) = \mathbf{70}(\boldsymbol{x-12})$$

$$(\boldsymbol{y-1040}) = \mathbf{70}\boldsymbol{x} - \mathbf{840}$$

y=70x-840+1040
y= 70x+200

(i) The linear relationship of y and x is y =70x+200
(ii) Constant expenses is Rs 200
(iii) Variable expenses per member is Rs 70

பயிற்சி வினாக்கள்

1. (2,-2) (-1,4)ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளியைக் காண்க. ***Answer =*** $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{1}\right)$
2. (4 , 7) (1 , 2) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை வெளிப்புறமாக 3 : 2.என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

   Answer = (–5,–8)
3. (2,5) , (5,2) மற்றும்(6,6) ஆகியவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.
   Answer = $\left(\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}\right)$
4. (0, 4) மற்றும்(6, 8) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைக் காண்க.

   Answer = $(\sqrt{\mathbf{52}})$
5. (0,3), (-2,1) மற்றும் (-1,4) என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகுமா எனத் தீர்மானிக்க. **Answer:** $\boldsymbol{AB^2 = 8, BC^2 = 10,\ AC^2 = 2}$
6. (*4*, *-4*), (- *4*, 4) மற்றும் ($4\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$) என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.

   Answer: $\boldsymbol{AB = 8\sqrt{2},\ BC = 8\sqrt{2},\ AC = 8\sqrt{2}}$
7. (-2, -1), (1, 0), (4, 3) மற்றும் (1, 2)என்ற புள்ளிகளை, வரிசைமாறாமல் எடுத்து கொண்டால், அவை ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும் என நிரூபிக்கவும்.

   Answer: $\boldsymbol{AB^2 = 10,\ BC^2 = 18,\ CD^2 = 10, AD^2 = 18}$

   $\boldsymbol{AB^2 + BC^2 \neq AC^2\ \ BECAUSE\ AC^2 = 52}$

8. (3, 2), (5, 4), (3, 6) மற்றும் (1, 4) என்ற புள்ளிகளை வரிசை மாறாமல் எடுத்துக்கொண்டால் அவை ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகளாகும் எனக் காட்டுக. .

Answer: $AB^2 = 8,\ BC^2 = 8,\ CD^2 = 8, AD^2 = 8$
$AB^2 + BC^2 = AC^2\ \ BECASUSE\ AC^2 = 16$

9. கீழ்கண்டவைகளுக்கு சாய்வை கணக்கிடவும்.

i. (3,2), (-3,1)

ii. (3,-1),(-2,0)

iii. (-2,-1),(5,7)

Answer: (i) $\frac{-1}{-6}$ ***(ii)*** $\frac{1}{-5}$ ***(iii)*** $\frac{8}{7}$

10.(-3,1) (3 , 4) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டு (5,1) and (1 , -1) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டுக்கு இணையாக செல்கிறதா என சரிபார்க்க.

Answer: slope of AB= $\frac{1}{2}$ ***and slope BC =*** $\frac{1}{2}$

11. (2,3) and (4,2) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டு (5 , 3) and (6,5) என்ற புள்ளிகள் கொண்ட கோட்டுத்துண்டுக்கு செங்குத்தாக உள்ளதா என ஆராய்க

Answer: slope of AB= $\frac{-1}{2}$ ***and slope BC =*** $\frac{2}{1}$

இயற்கணித கோவைகள் (Algebraic Expressions)

கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் ஆகிய செயல்களில் மதிப்புகள் மாறும் தன்மை கொண்ட ஆங்கில எழுத்துக்களையும் மாறிகளாக பயன்படுத்திச் செயல்படுத்தும் கணிதப்பகுதி இயற்கணிதம் ஆகும். அவ்வாறு மாறிகளை கொண்டு பல உறுப்புகளை மேற்குறிய செயல்களுக்கு வெளிப்படுத்தும் தொகுப்பு இயற்கணித கோவைகள் எனப்படும்.

Polynomial Expressions பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

உதாரணமாக $4x5^2 + 3x5^1 - 7$ என்ற ஒரு எண்கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் 5-ஐ அடி எண்ணாக கொண்டு அடுக்குக குறியீட்டில் எழுதப்பட்டிருக்கிறது. இந்த 5-க்கு பதில் மாறி அடையாளத்தில் ஆங்கில எழுத்து ஒன்றை கொண்டு பின்வருமாறு உருவாக்கலாம்.

$$4x^2 + 3x-7 \text{ (or) } 4a^2 + 3a - 7$$

இதேப்போல் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளை கொண்டும் கோவைகள் உருவாக்க முடியும். இவ்வாறு மாறிகளைக் கொண்டு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளால் அமைக்கப்படும் கோவைகளை பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்று அழைக்கிறோம்.

Monomial Expression ஓருறுப்புக் கோவை

ஒரு கோவையில் ஒரே ஒரு உறுப்பு மட்டும் இடம் பெறுமானால் அது ஓருறுப்புக்கோவை எனப்படும்.

Example : $1/3.\ 3x\ -3x^2$

Biomial Expression ஈருறுப்புக் கோவை

ஒரு கோவையில் இரண்டு உறுப்புகள் மட்டும் இடம் பெறுமானல் அது ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

Example : $x+y$, $2x-3$, $7/3a+b$, $3x^2-13$

Trinomial Expression மூவுறுப்புக் கோவை

ஒரு கோவையில் மூன்று உறுப்புகள் மட்டும் இடம் பெறுமானல் அது மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும்.

Example : $3a+2b+c$, $2x^2+3x-4$, $4x^3-7x^2-3$

Co-efficient கெழு

மாறியின் தன்மையை தீர்மானிக்கும் நிலை எண்தான் (Constant) கெழு என்று அழைக்கப்படகிறது. உதாரணமாக $4x^2-3x+7$ என்ற சமன்பாட்டில் $4x^2$ என்ற உறுப்பில் x^2ன் கெழு 4 ஆகும். அப்படியென்றால் x^2 என்ற மாறி அதைப்போல் 4 மடங்கு உள்ளது என்ற தன்மையை பெறுகிறது. இதுபோல் x என்ற மாறிக்கு -3 என்பது கெழுவாக குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது. மேலும் 7 என்பது மாறிலி உறுப்பு அல்லது தனி உறுப்பு (Constant) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு பல்லுறுப்பு கோவையின் படி (Degree of a Polynomial Expression)

ஒரு உறுப்பில் உள்ள மாறியின் அடுக்குக்குறியை (Degree (or) Power (or) Index) அம்மாறியின் படி என்று அழைக்கிறோம். இதுபோல் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள உறுப்புகளில் எந்த உறுப்பின்படி மிகப் பெரியதாக உள்ளதோ அந்த எண்ணே அக்கோவையின் படி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

உதாரணமாக $4x^2-3x+7$ என்ற கோவையில் உள்ள மாறிகளில் மிகப்பெரிய அடுக்குக் குறி இரண்டு என இருப்பதால் இது இருபடிக்கோவை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

பல்லுறுப்பு கோவையின் ஏறுவரிசை மற்றும் இறங்கு வரிசை

(Ascending and Descending order of polynomial)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள பல உறுப்புகள் அவற்றில் உள்ள மாறிகளின் படிகளுக்கு தகுந்தவாறு ஏறுவரிசையிலோ அல்லது இறங்குவரிசையிலோ அமைப்பது இம்முறையாகும். அவ்வாறு செய்வதால் பல்லுறுப்பு கோவைகளின் செயல்கள் எளிதாக்கப்படுகிறது.

உதாரணமாக $8-7x^2+10x-3x^3+x^5+4x^4$ என்ற கோவை எடுத்துக் கொள்கவோம்.

ஏறுவரிசை : $8+10x-7x^2-3x^3+4x^4+x^5$

இறங்கு வரிசை : $x^5+4x^4-3x^3-7x^2+10x+8$

பல்லுறுப்பு கொவை செயல்களில் இறங்கு வரிசை முறைதான் பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் - கூட்டல்

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்பு கோவைகளை கூட்ட வேண்டுமென்றால் முதலில் கூட்ட வேண்டிய கோவைகளின் அடைப்புகுறிகளை நீக்க

வேண்டும். அதன்பின் ஒவ்வொரு ஒரே தன்மையை கொண்ட உறுப்புகளை அதனுடைய மிக மற்றும் குறை தன்மைக்கேற்ப கூட்டல் கழித்தல் முறைகளை செயல்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: Add 2x+3 with 3x+5

தீர்வு (2x+3)+(3x+5)

=2x+3+3x+5

=5X+8

எடுத்துக்காட்டு 2: Add $5x^2$-6 with $3x^2$-5

தீர்வு $(5x^2-6)+(3x^2-5)$

$= 5x^2-6+3x^2-5$

$=8x^2-11$

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் - கழித்தல்

ஒரு பல்லுறுப்பு கோவையிலிருந்து மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையை கழிக்க வேண்டுமென்றால் அடைப்புக்குறியை நீக்கும்போது இரண்டாவத கோவையில் உள்ள நிறை எண் உறுப்பு குறை எண் உறுப்பாகவும், குறை எண் உறுப்பு நிறை எண் உறுப்பாகவும் மாற்றியபின் கூட்டல் கழித்தல் முறைகள் செயல்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3 subtract 3x+5 from 2x+3

தீர்வு (2x+3)-(3x+5)

=2x+3-3x+5

= -x-2

எடுத்துக்காட்டு 4 subtract $3x^2$-5 from $5x^2$-6

தீர்வு $(5x^2-6)-(3x^2-5)$

$=5x^2-6-3x^2-5$

$=2x^2-1$

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் - பெருக்கல்

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒரு எண்ணால் பெருக்கும் போது ஒவ்வொரு உறுப்பையும் பெருக்க வேண்டிய எண்ணால் பெருக்க வேண்டும். அதுபொல் இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை பெருக்க வேண்டுமென்றால் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அடுத்த கோவையில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புகளோடு பெருக்கி இறுதியில் ஓரின உறுப்புகளை ஒன்று சேர்த்து கூட்ட வேண்டும்.

கெழுவுடன் கூடிய இரு உறுப்புகளைப் பெருக்கும்போது கெழுக்களை தனியாகவும், மாறிகளை தனியாகவும் பெருக்க வேண்டும். அதுபோல் இரு வெவ்வேறு மாறிகளைப் பெருக்கும் போது ஆங்கில எழுத்து வரிசையில் எழுத வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 Multiply $(3x^2-7x+5) \times (-4x^3)$

தீர்வு

$(3x^2-7x+5) \times (-4x^3)= (-4x^3\times3x^2)+(-4x^3\times(-7x)) +(-4x^3\times5)$

$= -12x^5+28x^4+(-20x^3)$

$=-12x^5+28x^4-20x^3$

எடுத்துக்காட்டு 6 Multiply $(2x+3) \times (3x-5)$

தீர்வு

$(2x+3) \times (3x-5) = [2x\times3x]+[2x (-5)]+[3\times3x]+[3x(-5)]$

$= 6x^2+(-10x)+9x+(-15)$

$=6x^2-10x+9x-15$

$=6x^2-x-15$

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் - வகுத்தல்

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு கோவையால் வகுப்பது வகுத்தலாகும். சாதாரண எண்களில் வகுத்தல் முறையை பின்பற்றுவது போல் பல்லுறுப்பு கோவைகளிலும் பின்பற்றப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 7 Divide $(-4x^3)$ from $(-12x^5+28x^4-20x^3)$

தீர்வு

$$= \frac{-12x^5+28x^4-20x^3}{-4x^3} = \frac{-12x^5}{-4x^3} + \frac{28x^4}{-4x^3} - \frac{20x^3}{-4x^3}$$

$= 3x^2-7x+5$

Factorisation காரணிப்படுத்துதல்

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோவைகளைப் பெருக்கினால் பெருக்கல் பலன் கிடைக்கிறது. இந்த பெருக்கற் பலன் கிடைக்கக் காரணமாக உள்ள கோவைகள் பெருக்கற் பலன் கோவைக்கு காரணிகளாக கருதப்படுகிறது.

உதாரணமாக (2x+3) மற்றும் (3x-5) என்ற இரு கோவைகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இரண்டையும் பெருக்கினால் $6x^2$-x-15 என்ற கோவையாக விடை கிடைக்கிறது. இந்த விடைகள் கிடைக்க மேலே கூறப்பட்ட இருகோவைகளும் காரணமாக இருக்கிறது. அதனால் அவைகள் காரணிகள் என்று அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் அந்த விடையில் இருந்து ஏதாவது ஒரு காரணியை வகுத்தாலும் மற்றொரு காரணி விடையாக கிடைக்கிறது.

மேலும் பல்லுறுப்பு கோவைகளின் காரணிகளை மதிப்பிட Algebraic Identities என்று அழைக்கப்படும். இயற்கணித ஒற்றுமை சூத்திரங்களும் தேவைப்படும் இடங்களில் உபயோகப்படுத்தப்படுகிறது. மற்ற இடங்களில் காரணிப்படுத்தப்படுகிறது. மற்ற இடங்களில் காரணிப்படுத்தப்படும் கோவையில் பொது உறுப்புகளை தனியாக பிரித்து அதன்மூலம் காரணிகள் கண்டறியப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8 Find the factors of 7x

தீர்வு

$7x = 7 \times x = 7x$

$=7, x$

The factors of 7 and X

எடுத்துக்காட்டு 9 Find the factors of 3x-6y

(இரண்டு உறுப்புகளையும் 3 என்ற எண்ணால் வகுக்க முடியும். எனவே அதை இரண்டு உறுப்புகளுக்கும் பொதுவாக வைத்து வெளியே எடுக்கும்போது காரணிகள் கிடைக்கிறது).

$3x-6y = 3(x-2y)$

$= 3, (x-2y)$

எடுத்துக்காட்டு 10 find the factors of $2x^3+6x^2+4x$

$$2x^3+6x^2+4x= 2x(x^2+3x+x)$$

(முதலில் எல்லா உறுப்புக்கும் பொதுவான 2x வெளியே எடுக்கப்பட்டது. மேலும் x^2+3x+2 என்பதையும் காரணிப்படுத்த முடியும். இதற்கு இருபடிச் சமன்பாடுகளில் காரணிப்படுத்தல் முறையில் தீர்வு கண்ட முறை இதற்கு பயன்படுத்த வேண்டும்).

$$x^2+3x+2= x^2+2x+x+2$$

$$=x(x+2)+1(x+2)$$

$$= (x+2) (x+1)$$

$2x^3+6x^2+4x= (2x) (x+2) (x+1)$

Equations சமன்பாடுகள்

இரண்டு கோவைகளுக்கு (Expressions) இடையில் ஒற்றுமையை ஏற்படுத்தி ஒன்று மற்றொன்றிற்கு சமம் (=) என்ற குறியீட்டில் குறிப்பிடுவதே சமன்பாடு எனப்படும்.

உதாரணமாக $4x+3 = 3x+6$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். $4x+3$ என்ற கோவை $3x+6$ என்ற கோவைக்கு சமம் என்று ஒற்றுமை ஏற்படுத்தப்படுகிறது. சமம் என்று கூறப்படுவதால் x என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பில் இருக்கும் போது இரண்டு கோவைகளும் சமமாகிறது. xன் மதிப்புக்கான x Variables ஒரு பக்கமாவும், நிலை எண்கள் ஒரு பக்கமாகவும் கொண்டு வந்து விடைகாண முடியும்.

$$4x-3x = 6-3$$

$$x =3$$

x=3 என்று இருக்கும்போது இரண்டு கோவைகளும் சமமாக இருக்கிறது.

$(4x^3)+3=(3x^3)+6$

$15 = 15$

Linear Equations ஒருபடி சமன்பாடுகள்

An equation, whose highest index or power is one, known as Linear equation. Otherwise known as the first degree equation.

ஒரு சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிகளின் அடுக்குகள் ஒன்றிற்கு மிகாமல் இருந்தால் ஒருபடி சமன்பாடு அல்லது சாதாரண சமன்பாடு என அழைக்கப்படுகிறது. இதனுடைய பொது வடிவம் ax+b=0 ஆகும். x என்பது மாறி (Variable) ஆகும். a மற்றும் b என்பது நிலை எண்கள் ஆகும். இவ்வகை சமன்பாட்டில் தீர்வு காண்பது எளிது.

எடுத்துக்காட்டு 11 solve 3x+6=0

தீர்வு

3x=-6

X=$\frac{-6}{3}$= -2

எடுத்துக்காட்டு 12 solve $\frac{x}{2}+1=5$

தீர்வு

$\frac{x}{2}=5-1$

$\frac{x}{2}=4$

$\frac{x}{2}=\frac{4}{1}$ (*Cross multiplying*)

X=8

எடுத்துக்காட்டு 13 solve $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=8$

தீர்வு

$\frac{5x+3x}{15}$=8 (*taking L.C.M*)

5x+3x=120

8x=120

X= $\frac{120}{8}$

X= 15

எடுத்துக்காட்டு 14 solve $\frac{x+2}{4} = \frac{x-3}{3}$

தீர்வு

$\frac{x+2}{4} = \frac{x-3}{3}$ (*Cross multiplying*)

$3(x+2) = 4(x-3)$

$3x + 6 = 4x - 12$

$4x - 3x = -12 - 6$

$-x = -18$

$x = 18$

எடுத்துக்காட்டு 15 solve $\frac{x}{2} - 2 = \frac{3}{5}x + 4$

தீர்வு

$\frac{x}{2} - \frac{3}{5} = 4 + 2$

$\frac{5x-6x}{10} = 6$

$5x - 6x = 60$

$-x = 60$

$x = -60$

எடுத்துக்காட்டு 16 solve $\frac{4}{x+2} = \frac{3}{x-3}$

தீர்வு

$\frac{4}{x+2} = \frac{3}{x-3}$ *(Cross multiplying)*

$4(x-3) = 3(x+2)$

$4x - 12 = 3x + 6$

$4x - 3x = 6 + 12$

$x = 18$

எடுத்துக்காட்டு 17 solve $\frac{x-3}{x-1}+\frac{2x+1}{x-2}=3$

தீர்வு

Multiplying both sides by (x-1) (x-2)

$$\frac{(x-3)(x-1)(x-2)}{x-1}+\frac{(2x-1)(x-1)(x-2)}{x-2}=3(x-1)(x-2)$$

$$(x^2-2x-3x+6)+(2x^2-2x+x-1)=3(x^2-2x-x+2)$$

$$x^2-2x-3x+6+2x^2-2x+x-1=3x^2-6x-3x+6$$

$$x^2+2x^2-3x^2-2x-3x-2x+x+6x+3x=6+1-6$$

$$3x=1$$

$$x=\frac{1}{3}$$

ஒருமித்த ஒருபடி சமன்பாடுகள்

ஒருபடிச்சமன்பாடுகளில் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகள் வந்தால், மாறிகளின் விடையை அறிந்து கொள்வதற்கான பயன்படுத்தப்படும் சமன்பாடுகளே ஒருமித்த ஒரு படி சமன்பாடுகள் ஆகும்.

உதாரணமாக x மற்றும் y என்ற மாறிகள் கொண்ட ஒரு சமன்பாடு இருந்ததால் x, yன் மதிப்புகான அதற்கு ஒத்த மற்றொரு சமன்பாட்டை தெரிந்து கொண்டு இரண்டு சமன்பாடுகளை தீர்க்க வேண்டும். இறுதியில் x, y மதிப்பு காணமுடியும்.

எத்தனை மாறிகள் இருக்கிறதோ அத்தனை ஒருமித்த சமன்பாடுகள் பயன்படுத்தினால்தான் மாறிகளின் மதிப்பை காண இயலும். x, y, z என்ற மூன்று மாறிகள் இருந்தால் மூன்று ஒருமித்த ஒருபடி சமன்பாடுகள் பயன்படுத்த வேண்டும்.

Simultaneous equations are those equations in which the number of equations must be equal to the number of unknows. It is used to find the values of unknowns.

Example :

x+y=5

x-y=1

Simultaneous Linear Equations தீர்க்கும் முறை

1.**Elimination Method** (நீக்கல் முறை)

இம்முறையில் சமன்பாடுகளில் ஏதாவத ஒரு மாறியின் கெழுவை சமமாக்கி நீக்கிவிட்டு மற்றொரு மாறியின் மதிப்பு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறத. பிறகு அதை ஏதாவது ஒரு சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு மற்ற மாறியின் மதிப்பு கணக்கிடப்படுகிறது.

2.**Method of Substitution** (பிரதியீட்டு முறை)

இம்முறையில் மாறிகளின் தொடர்பை கருத்தில் கொண்டு ஒரு சமன்பாட்டில் உள்ள ஒரு மாறிக்கு இணையான மதிப்பு காணப்படுகிறது. இம்மதிப்பு மற்றொரு சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு ஒரே மாறியை கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாடாக மாற்றி அதன்மூலம் ஒரு மாறியின் மதிப்பு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. அதன்பின் இந்த மதிப்பு ஏதாவது ஒரு சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு அடுத்த மாறியின் மதிப்பம் கணக்கிடப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 18 solve the equation

தீர்வு

x- 2y=1

2x+y=-3

Method of Elimination

x- 2y=1 ---------------(1)

2x+y=-3---------------(2)

(1) ×1 x - 2y =1

(2) ×2 4x+2y = -6 (+)

____

(1)+(2) 5x = -5

____

$x = \frac{-5}{5}$; x= -1

Substituting x= -1 in (1)

x-2y=1

-1-2y=1

-2y=1+1

-2y=2

$$y = \frac{2}{-2} = -1$$

Method of Substitution

x- 2y=1 ---------------(1)

2x+y=-3---------------(2)

x- 2y=1

x=1+2y

Substituting x=1+2y in (2)

2x+y=-3---------------(2)

2(1+2y)+y=-3

2+4y+y=-3

2+5y=-3

5y=-3-2

5y=-5

$$y = \frac{-5}{5} = -1$$

Substituting y= -1 in (1)

x- 2y=1

x- 2(-1)=1

x+2=1

x=1-2

x=-1

எடுத்துக்காட்டு 19 Solve the following equation

$4x-3y-1=0$

$2x-5y+3=0$

தீர்வு

$4x-3y=1$---------------------(1)

$2x-5y=-3$--------------------(2)

(1) ×1 $4x- 3y = 1$

(2) ×2 $4x-10y=-6$ (-)

____

(1)-(2) $7y=7$

____

$$y = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = 1$$

Substituting y= 1 in (1)

$4x-3y=1$

$4x-3(1)=1$

$4x-3=1$

$4x=1+3$

$4x=4$

$$x = \frac{4}{4} = 1$$

$$x = 1$$

Method of substitution

4x-3y=1---------------------(1)

2x-5y=-3--------------------(2)

4x-3y=1---------------------(1)

4x-3y=1

4x=1+3y

$$x = \frac{1}{4} + \frac{3y}{4}$$

Substituting $x = \frac{1}{4} + \frac{3y}{4}$ in (2)

2x-5y=-3--------------------(2)

2($\frac{1}{4} + \frac{3y}{4}$)-5y=-3

$$\frac{2}{4} + \frac{6y}{4} - 5y = -3$$

$$\frac{2 + 6y - 20y}{4} = -3$$

$\frac{2-14y}{4} = -3$ (*cross multiplication*)

$$2 - 14y = -12$$

$$-14y = -12 - 2$$

$$-14y = -14$$

$$y = \frac{-14}{-14} = 1$$

Substituting y= 1 in (1)

4x-3y=1

4x-3(1)=1

4x-3=1

4x=1+3

4x=4

$x = \frac{4}{4} = 1$

$x = 1$

எடுத்துக்காட்டு 20 solve $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5$

$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 7$

தீர்வு

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5$

$\frac{3x + 2y}{6} = 5$

$3x + 2y = 30$------------------------------(1)

$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 7$

$\frac{3x - 4y}{12} = 7$

$3x - 4y = 84$------------------------------(2)

$3x + 2y = 30$

$3x - 4y = 84$ (-)

___

6y = -54 (1) - (2)

___

$y = \frac{-54}{6} = -9$

$y = -9$

Substituting y= -9 in (1)

$3x + 2y = 30$

$3x + 2(-9) = 30$

$3x - 18 = 30$

$3x = 30 + 18$

$3x = 48$

$x = \frac{48}{3} = 16$

எடுத்துக்காட்டு 21

Solve $2x + 3y + z = 11$

$3x + 2y - z = 4$

$x + y - 2z = -3$

தீர்வு

$2x + 3y + z = 11$----------------(1)

$3x + 2y - z = 4$-------------------(2)

$x + y - 2z = -3$-----------------(3)

$2x + 3y + z = 11$-------------------------(1)

$3x + 2y - z = 4$----------------------------(2) (1) + (2) (z நீக்கல்)

$\mathbf{5x + 5y = 15}$-------------------------(4)

---

(1) ×2= $4x + 6y + 2z = 22$

(3) ×1= $x + y - 2z = -3$ (1) + (2) (z நீக்கல்)

$\mathbf{5x + 7y = 19}$-------------------(5)

$5x + 5y = 15$ (4)

$5x + 7y = 19$ (5)

$-2y = -4$ (4)-(5)

$$y = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = 2$$

Substituting y= 2 in (4)

$$5x + 5y = 15$$

$$5x + 5(2) \ = 15$$

$$5x + 10 \ = 15$$

$$5x = 15 - 10$$

$$5x = 5$$

$$x = \frac{5}{5} = 1$$

$$x = 1$$

Substituting y= 2 and x=1 in (1)

$$2x + 3y + z = 11$$

$$2(1) + 3(2) + z = 11$$

$$2 + 6 + z = 11$$

$$8 + z = 11$$

$$z = 11 - 8$$

$$z = 3$$

Quadratic Equations இருபடிச்சமன்பாடு

இருபடி சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் (General form) எனப்படும். x என்பது மாறி ஆகும். a, b மற்றும் c என்பவை நிலை எண்கள் ஆகும். சமன்பாட்டில் உள்ள மாறியின் ஒரு மதிப்பின் அடுக்கு இரண்டு ஆக இருந்தால் அவை இருபடிச் சமன்பாடு என அழைக்கப்படுகிறது. இருபடி சமன்பாட்டில் ஒக்கு இரண்டு விடைகள் தீர்வாக கிடைக்கிறது.

A Quardratic equation is one in which the highest index is 2. It may have i) One variable and ii) Two Variable

Example :

$x^2+7x+8=0$ - One variable

$x^2+2y+y^2=12$ - Two variable

இருபடிச்சமன்பாடு (Factorisation Method)

இம்முறையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடு, ஒருபடி கோவைகளை கொண்ட இரண்டு காரணிகளாக பிரிக்கப்படுகிறது. இரண்டு காரணிகளும் தனித்தனியாக மதிப்பிடும் போது xக்கு இரண்டு மதிப்பு தீர்வாக கிடைக்கிறது.

இருபடி சூத்திரமுறை (Quadratic formula Method)

இம்முறையில் கீழ்க்கண்ட சூத்திரம் பயன்படுத்தப்பட்டு ஒன் மதிப்பு காணப்படுகிறது.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\pm$ என்பதை + ஆக எடுக்கும்போது ஒரு மதிப்பும் - ஆக எடுக்கும் போது மற்றொரு மதிப்பும் தீர்வாக கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 22: Solve $x^2+5x+6=0$

தீர்வு

Factorisation Method

$x^2+5x+6=0$

(முதலில் நிலை எண்ணிற்கும் x^2ல் உள்ள நிலை எண்ணிற்கும் பெருக்கல் பலன் காண வேண்டும். அதன்பின் இந்த பெருக்கல் பலனை இருகாரணிகளாக பிரிக்க வேண்டும். ஆனால் பிரிக்கப்பட்ட இரு காரணிகளின் கூட்டல் பலன் x மாறியின் நிலை எண்ணிற்கு சமமாக இருக்க வேண்டும்)

$$1 \times 6 = 6$$

6ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூட்டல் பலன்
1 x 6	1 + 6 = 7

6 x 1	6 + 1 = 7
2 x 3	2 + 3 = 5
3 x 2	3 + 2 = 5

x மாறியின் நிலை எண் 5க்கு சமமான காரணிகள் 2x3 அல்லது 3x2 ஆகும். இவற்றில் ஒன்றை தேர்வு செய்து கீழ்க்கண்டவாறு எழுதி காரணிப்படுத்த வேண்டும்.

$$x^2+2x+3x+6=0$$

முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் பொதுவானதை வெளியில் எடுக்க வேண்டும். அதேபோல் அடுத்த இரண்டு உறுப்புகளின் பொதுவானவற்றையும் வெளியில் எடுக்க வேண்டும்.

$$x(x+2) + 3(x+2) = 0$$

இப்பொழுது (x+2) என்பது உறுப்புகளுக்கும் பொதுவானதாக இருக்கிறது. அதையும் வெளியில் எடுத்துவிட்டால் இரண்டு காரணிகள்ஒருபடி கோவைகளாக கிடைக்கிறது. அதிலிருந்து ஒக்கு 2 விடைகள் தீர்வாக கிடைக்கிறது.

(x+2)	(x+3)
(x+2)=0	(x+3)=0
X= -2	X= -3

Quadratic formula Method

$x^2+5x+6=0$

a=1; b=5; c=6

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x = \frac{-5+\sqrt{5^2-4\times1\times6}}{2\times1}$ $\qquad$ $x = \frac{-5-\sqrt{5^2-4\times1\times6}}{2\times1}$

$x = \frac{-5+\sqrt{25-24}}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{-5-\sqrt{25-24}}{2}$

$x = \frac{-5+\sqrt{1}}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{-5-\sqrt{1}}{2}$

$x = \frac{-5+1}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{-5-1}{2}$

$x = \frac{-4}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{-6}{2}$

$x = -2$ $\qquad$ $x = -3$

எடுத்துக்காட்டு 23: solve $2x^2+9x+4=0$

தீர்வு

2x4=8

8ன் காரணிகள்	காரணிகளின் கூட்டல் பலன்
1 x 8	1 + 8 = 9
8 x 1	8 + 1 = 9
2 x 4	2 + 4 = 6
4 x 2	4 + 2 = 6

$2x^2+8x+x+4=0$

2x(x+4)+1(x+4)=0

(x+4) (2x+1)=0

(x+4) =0 $\qquad$ (2x+1)=0

X=-4 $\qquad$ 2x=-1; $x = \frac{-1}{2}$

NATURE OF ROOTS

மூலங்களின் தன்மைகள்

இருபடி சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வு காணும்போது இரண்டு விடைகள் கிடைக்கிறது. இவைகளை இருபடி சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்றும் அழைக்கிறோம். இந்த மூலங்கள்

$\sqrt{b^2-4ac}$ என்ற கோவையை சார்ந்து இருக்கிறது. அதனால் மேற்கூறிய கோவையின் மதிப்ig + என கணக்கிடும்போது ஒரு விடையும் - என கணக்கிடும் போது ஒரு விடையும் தீர்வாக கிடைக்கிறது.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

மேலும் மூலங்களின் கூட்டல் பலன் (Sum of the roots) காண மற்றும் அவற்றின் பெருக்கல் பலன் (Product of the roots) காண என்ற விகிதங்கள்ப யன்படுத்தப்படுகிறது. தீர்வு காண்பதற்கு முன் மூலங்களின் கூட்டல் பலனையும், பெருக்கல் பலனையும் மேற்கூறிய விகிதங்கள் மூலம் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

Formation of an Equation

இருபடிச் சமன்பாடுகள் உருவாக்குதல்

இருபடி சமன்பாடுகளுக்கு கிடைக்கும் தீர்வுகளே மூலங்கள் என்று நாம் அறிந்திருக்கிறோம். அத்தகைய இரு மூலங்களை கொண்டு சமன்பாடுகளை உருவாக்குவதே இந்த பகுதியில் நாம் படிப்பதாகும். இருபடிச் சமன்பாடுகளின் பொதுவடிவம் $ax^2+bx+c=0$ என அறிந்திருக்கிறோம். மூலங்களின் கூட்டல் பலனை b என்ற இடத்திலும் மூலங்களின் பெருக்கல் பலனை c என்ற இடத்திலும் பிரதியிடும் போது இருபடி சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 24

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுக்கு மூலங்களின் கூட்டல் பலனையும் பெருக்கல் பலனையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

x-5x+2=0

தீர்வு

a=1; b=-5; c=2

Sum of the two roots = $\frac{-b}{a}$

$= \frac{-(-5)}{1} = 5$

Product of the two roots = $\frac{c}{a}$

$= \frac{2}{1} = 2$

எடுத்துக்காட்டு 25

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுக்கு மூலங்களின் கூட்டல் பலனையும் பெருக்கல் பலனையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

$2x^2+9x+4=0$

தீர்வு

a=2; b=9; c=4

Sum of the two roots = $\frac{-b}{a}$

$= \frac{-9}{2}$

Product of the two roots = $\frac{c}{a}$

$= \frac{4}{2} = 2$

பயிற்சி வினாக்கள்

1. Add $(3x^2+2x-5)$ with $(8x-7)$ ***Answer=*** $\boldsymbol{3x^2+10x-12}$
2. Subtract $(5x^2+2x-3)$ from $(8x^3+4x^2-3x+5)$ ***Answer=*** $\boldsymbol{8x^3-x^2-x+2}$
3. Multiply $(3x-5) \times (2x+7)$ ***Answer=*** $\boldsymbol{6x^2+11x-35}$
4. Divide $(-4x^3)$ from $(-12x^5+28x^4-20x^3)$ ***Answer=*** $\boldsymbol{3x^2-7x+5}$
5. Find the factors of 7x+14y ***Answer: 7, (x+2y)***
6. Find the factors of $3x^2+3x-6$ ***Answer: 3, (x-1), (x+2)***
7. solve 5x-10=0 ***Answer : x=2***
8. solve $\frac{x}{2}+\frac{x}{7}=9$ ***Answer : x=14***
9. solve $\frac{x+3}{3}=\frac{x-4}{2}$ ***Answer : x=18***
10. solve the equation

$3x- 4y=-5$

$4x+5y=45$

Answer: x=5 and y =5

11. solve the equation

$3x-y=1$

$x-2y=-3$

Answer: x=1 and y =2

12. Solve $2x+2y-3z=15$

$x+3y-2z=12$

$3x-y+z=9$

Answer: x=4, y =2 and z= –1

13. Solve $x^2+8x+15=0$ by two methods

Answer: x=–3 or x =–5

14. solve $3x^2+8x+4=0$ by two methods

Answer: $x=\frac{-2}{3}$ ***or x =–2***

ஒரு எண்ணை இரண்டோ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முறையோ பெருக்க வேண்டுமென்றால் அதற்கு அடையாளமாக அந்த எண்ணிற்கு சற்றுமேலே பெருக்க வேண்டிய எண்ணிக்கையை குறிப்பிடுவதே அடுக்குக்குறி அல்லது படிக்குறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

உதாரணமாக 5 என்ற எண்ணை 4 முறை பெருக்க வேண்டும்: 5x5x5x5 என்று கூறுவதை 5^4 என்று அடுக்குக் குறியீட்டில் கூறுகிறோம். 4 என்பது அடுக்குறியாகவும் 5 என்பது அடி எண் (base) ஆகவும் இருக்கிறது.

அடுக்குக்குறியின் வகைகள் (Types of Indices) அடுக்குக் குறிகள் நான்கு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன.

1) நேரிடை அடுக்குக் குறிகள் (Positive indices)
2) எதிரிடை அடுக்குக் குறிகள் (Negative indices)
3) சைபர் அடுக்குக் குறிகள் (Zero indices)
4) பின்ன அடுக்குக் குறிகள் (Fractional indices)

Positive indices (நேரிடை அடுக்குக் குறிகள்)

அடுக்குக் குறியீடு நேரிடை எண்களால் குறிக்கப்படுவதே நேரிடை எண் அடுக்குகள் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

Zero and Negative Indices பூஜ்ஜியம் மற்றும் எதிரிடை எண் குறியீடுகள்:

அடுக்குக் குறியீடு பூஜ்ஜியம் மற்றும் எதிரிடை எண் ஆகியவற்றில் குறிக்கப்படுவதே இவ்வகையாகும்.

1. ஏதாவது ஒருமெய் எண்ணிற்கு அடுக்குக் குறியீடு பூஜ்ஜியம் ஆக இருந்தால் அதன் மதிப்பு ஒன்று ஆகும்.

$$a^0 = 1$$

2. ஏதாவது ஒருமெய் எண்ணிற்கு அடுக்குக் குறியீடு எதிரிடை எண்ணில் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அது தலைகீழ் வடிவத்தில் (Reciprocal) நேரிடை எண்ணை குறிக்கிறது.

$$a^{-m}=\frac{1}{am}$$

Fractional Indices பின்னவடிவ அடுக்குகள்

அடுக்குறியீடுகளை பின்னவடிவில் குறிப்பிடுவதே இவ்வகையாகும் பின்னவடிவ அடுக்குகளை கொண்ட மெய்யெண்ணின் பொது வடிவம் a $^{p/q}$ ஆகும். இதனை பின்வரும் வழிகளில் படிமூலங்களாக மாற்ற முடிகிறது.

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})p$$

Laws of indices (அடுக்குகளின் விதிகள்)

1. $a^m \times a^n$ஸ்ரீa^{m+n}

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad if\ m > n$

   $\frac{a^m}{a^n} = 1 \qquad if\ m = n$

   $\frac{a^m}{a^n} = a^{\frac{1}{n-m}} \qquad if\ m < n$

3. $(ab)^m = a^m \times a^n$

4. $(a^m)^n = a^{mn}$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{a^n}$

எடுத்துக்காட்டு 1

சுருக்குக

(i) $X^5.X^8$

(ii) $2^3.2^5$

(iii) $X^5 \div X^8$

(iv) $3^5 \div 3^4$

(v) $(a^2.b^3.c)^2$

(vi) $(5^3)^2$

தீர்வு

(i) $X^5 . X^8 = X^{5+8} = X^{13}$

(ii) $2^3 . 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

(iii) $X^5 \div X^8 = \frac{1}{X^{8-5}} = \frac{1}{X^3}$

(iv) $3^5 \div 3^4 = 3^{5-4} = 3^1 = 3$

(v) $(a^2 . b^3 . c)^2 = (a^2)^2 \ (b^3)^2 \ (c)^2$

(vi) $(5^3)^2 = (5^{3\times 2}) = 5^6$

எடுத்துக்காட்டு 2

மதிப்பிடுக

(i) $81^2 .27$

(ii) $\frac{256^2}{64^3}$

(iii) (27×216)

(iv) $\frac{1296}{81}$

(v) $(8 \times 16 \times 32)$

தீர்வு

(i) $81^2 .27 = (3^4)^2 \ . \ 3^3$

$= \ 3^{8+3}$

$= 3^{11}$

(ii) $\frac{256^2}{64^3} = \ \frac{(4^4)^2}{(4^4)^3}$

$= \frac{4^8}{4^9} = \frac{1}{4^{9-8}} = \frac{1}{4}$

(iii) $(27 \times 216) = (3^3 \times 6^3) = (3 \times 6)^3 = (18)^3 = 5832$

(iv) $\frac{1296}{81} = \frac{6^4}{3^4} = \left(\frac{6}{3}\right)^4 = 2^4 = 16$

(v) $(8 \times 16 \times 32) = 2^3 . 2^4 . 2^5 = 2^{3+4+5} = 2^{12}$

எடுத்துக்காட்டு 3

மதிப்பிடுக

(i) $(\mathbf{5^0})^{\mathbf{2}}$

(ii) $(\mathbf{5^2})^{\mathbf{0}}$

(iii) $\mathbf{5}^{(\mathbf{2})^{\mathbf{0}}}$

(iv) $\boldsymbol{X^0}$

(v) $\boldsymbol{2X^0}$

(vi) $(\boldsymbol{2X})^{\mathbf{0}}$

(vii) $\mathbf{100000^0}$

தீர்வு

(i) $(5^0)^2 = 1^2 = 1$

(ii) $(5^2)^0 = 25^0 = 1$

(iii) $5^{(2)^0} = 5^1 = 5$

(iv) $X^0 = 1$

(v) $2X^0 = 2 \times 1 = 2$

(vi) $(2X)^0 = 2^0\ X^0 = 1 \times 1 = 1$

(vii) $100000^0 = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4

சுருக்குக

(i) $7^3 . 6^{-3}$

(ii) $4^{-5} . 4^3$

(iii) $(5^2 . 4^2)^{-3}$

(iv) $\frac{4^{-2}}{5^{-3}}$

(v) $\frac{1}{3^{-2}}$

(vi) $\frac{5^{-2}}{5^{-3}}$

(vii) $.\frac{5^{-3}}{5^{-2}}$

தீர்வு

(i) $7^3 . 6^{-3} = \frac{7^3}{6^3} = \left(\frac{7}{6}\right)^3$

(ii) $4^{-5} . 4^3 = \frac{1}{4^5} . \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4^{5+3}} = \frac{1}{4^8} = 4^{-8}$

(iii) $(5^2 . 4^2)^{-3} = (5^2)^{-3}\ (4^2)^{-3} = 5^{-6} . 4^{-6}$

$(5 \times 4)^{-6} = 20^{-6} = \frac{1}{20^6}$

(iv) $\frac{4^{-2}}{5^{-3}} = \frac{1}{4^2} \times \frac{5^3}{1} = \frac{5^3}{4^2} = \frac{125}{16}$

(v) $\frac{1}{3^{-2}} = 1 \times \frac{3^2}{1} = 3^2$

(vi) $\frac{5^{-2}}{5^{-3}} = 5^{-2-(-3)} = 5^1 = 5$

(vii) $.\frac{5^{-3}}{5^{-2}} = \frac{1}{5^{-2-(-3)}} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$

எடுத்துக்காட்டு 5

சுருக்குக $\left(\frac{7}{4}\right)^{-2}$**-**$5(4)^{-3}$**+**$(2X^2)^0$

தீர்வு

$= \frac{7^{-2}}{4^{-2}} - 5(4)^{-3} + [2^0 \times (X^2)^0]$

$= \frac{4^2}{7^2} - \frac{5}{4^3} + [1 \times 1]$

$= \frac{16}{49} - \frac{5}{64} + 1$

பயிற்சி வினாக்கள்

1. Simplify the following

i.	$a^4 \times a^3$	***Answer :*** $\boldsymbol{a^7}$
ii.	$a^{-3} \times a^5$	***Answer :*** $\boldsymbol{a^2}$
iii.	$\frac{a^{-3}}{a^5}$	***Answer :*** $\boldsymbol{\frac{1}{a^8}}$
iv.	$\frac{a^5}{a^{-3}}$	***Answer :*** $\boldsymbol{a^8}$
v.	$\left(\frac{2x}{5y}\right)^{-2}$	***Answer :*** $\boldsymbol{\frac{25y^2}{4x^2}}$
vi.	$\left(\frac{7x^2}{-3y}\right)^{-2}$	***Answer :*** $\boldsymbol{\frac{9y^2}{49x^4}}$
vii.	$(4^3)^{-2}$	***Answer :*** $\boldsymbol{\frac{1}{4^6}}$

2. Find the value with the help of indices rules

i.	$81^2 \times 27^{-1}$	***Answer :*** $\boldsymbol{3^5 = 243}$
ii.	$\frac{256^2}{64^{-3}}$	***Answer :*** $\boldsymbol{2^{34}}$
iii.	$27^{-1} \times 216$	***Answer :*** $\boldsymbol{\frac{216}{27} = 8}$

அறிமுகம்

இங்கிலாந்தை சார்ந்த சர். ஆர்தர் கெய்லி (1821-1895) என்ற கணிதவியலார் முதன் முதலில் அணிகள் என்கிற பதத்தை 1858ஆம் ஆண்டில் அறிமுகப்படுத்தினார். தற்காலத்தில் பயன்பாட்டு கணிதவியலில், அணிகளைக் குறியீடாகக் கொண்டு, ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை செம்மையான முறையில் பல இடங்களில் குறிக்கின்றோம்.

பொருளியியல், உளவியல் மற்றும் செயலியின் ஆய்வு ஆகிய துறைகளில் அணியியல் பயன்படுத்தப்படுகிறது. மேலும் இவற்றின் பயன்பாடுகள் பொறியியல், உடலியல் மற்றும் சமூக அறிவியல், வணிக மேலாண்மை, புள்ளியியல், மற்றும் நவீன கட்டுபாட்டு அமைப்பு ஆகிய துறைகளில் இன்றியமையாததாக உள்ளன.

இங்கிலாந்தை சார்ந்த சர். ஆர்தர் கெய்லி (1821-1895) என்ற கணிதவியலார் முதன் முதலில் அணிகள் என்கிற பதத்தை 1858ஆம் ஆண்டில் அறிமுகப்படுத்தினார். தற்காலத்தில் பயன்பாட்டு கணிதவியலில், அணிகளைக் குறியீடாகக் கொண்டு, ஒருபடிச் சமன்பாடுகளை செம்மையான முறையில் பல இடங்களில் குறிக்கின்றோம்.

பொருளியியல், உளவியல் மற்றும் செயலியின் ஆய்வு ஆகிய துறைகளில் அணியியல் பயன்படுத்தப்படுகிறது. மேலும் இவற்றின் பயன்பாடுகள் பொறியியல், உடலியல் மற்றும் சமூக அறிவியல், வணிக மேலாண்மை, புள்ளியியல், மற்றும் நவீன கட்டுபாட்டு அமைப்பு ஆகிய துறைகளில் இன்றியமையாததாக உள்ளன.

அணி வரையறை

எண்கள் மற்றும் சார்புகளை, செவ்வக அமைப்பில் பின்வருமாறு குறிப்பிடுவதை அணி (matrix) என்கிறோம்.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m\text{捡}} \end{bmatrix}$$

மேற்கண்ட அமைப்பில் உள்ள எண்கள் மற்றும் சார்புகளை குறிக்கும் யதை -யை மூலகங்கள் என்கிறோம். அம்மூலகங்கள் மெய்யெண்கள் அல்லது சிக்கலெண்கள் ஆக இருக்கலாம். மிகை முழு எண்களான m, n மேற்கண்ட அமைப்பில் நிரல், நிரைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B=\begin{bmatrix} X^2 & \sin x \\ \sqrt{x} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

அணியின் வரிசை

m நிரைகளையும், n நிரல்களையும் உடைய அணியின் வரிசை $m \times n$ எனப்படுகிறது. ` = $(a_{ij})_{m\times n}$ என்ற குறியீட்டில், 1 முதல் m வரை செல்லக் கூடிய i நிரைகளையும், 1 முதல் n வரை செல்லக்கூடிய j நிரல்களையும் குறிக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டாக

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ என்கிற அணியின் வரிசை 2×3 ஆகும்.

B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ என்கிற அணியின் வரிசை 2×2 ஆகும்.

C= $\begin{pmatrix} \sin è & \cos è \\ \cos è & \cos è \end{pmatrix}$ என்கிற அணியின் வரிசை 2×2 ஆகும்.

D= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ என்கிற அணியின் வரிசை 3×3 ஆகும்.

அணிகளின் வகைகள்

(i) சதுர அணி (Square Matrix)

ஓர் அணியில் உள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கையும், நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் அவ்வணி சதுர அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக

B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ வரிசை **2–** ஐ உடைய சதுர அணி ஆகும்.

D= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ வரிசை 3-ஐ உடைய சதுர அணி ஆகும்.

(ii) நிரை அணி (Row Matrix)

ஒரே ஒரு நிரையை உடைய அணி நிரை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக

A= $(2 \quad 0 \quad 1)$ என்பது **1** x **3** நிரை அணி ஆகும்.

B= $(1 \quad 0)$ என்பது 1 x 2 நிரை அணி ஆகும்.

(iii) நிரல் அணி (Column Matrix)

ஒரே ஒரு நிரல் உடைய அணி நிரல் அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ என்பது 3×1 வரிசை நிரல் அணி ஆகும்.

$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ என்பது 2×1 நிரல் அணி ஆகும்.

(iv) பூஜ்ஜிய அணி (Zero Or Null Matrix)

ஓர் அணியில் உள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியமாக இருப்பின், அவ்வணி பூஜ்ஜிய அணி என்றழைக்கப்படுகிறது. மேலும் அவ்வணி 0 என குறிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக

$0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது 2×2 வரிசையுள்ள பூஜ்ஜிய அணி ஆகும்.

$o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது 2×3 வரிசையுள்ள பூஜ்ஜிய அணி ஆகும்.

(v) மூலைவிட்ட அணி (Diagonal Matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலை விட்ட மூலகங்களைத் தவிர்த்து, மற்ற மூலகங்களின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாக இருப்பின் அவ்வணி மூலைவிட்ட அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக

$A= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ என்பது வரிசை 2-ஐ உடைய மூலைவிட்ட அணி

$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ **என;பது வரயீசை 3−ஐ உடைய ரூலைவயீட;ட அணயீ ஆகும;.**

(vi) திசையிலி அணி (Scalar Matrix)

ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் அனைத்து மூலைவிட்ட உறுப்புகளும் மு-க்கும் சமமாக இருப்பின் அவ்வணி திசையிலி அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக

$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ என்ற அணி வரிசை 3-ஐ உடைய திசையிலி அணியாகும். இங்கு K = **2.**

(vii) அலகு அணி (Unit Matrix)

ஒரு திசையிலி அணியின் அனைத்து மூலைவிட்ட மூலகங்களின் மதிப்பு 1 என்று இருக்கும் போது அவ்வணி அலகு அணி எனப்படும். இவ்வணி ஐ என குறிப்பிடப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக

$I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 2-ஐ உடைய அலகு அணியாகும்.

$I_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ என்பது வரிசை 3-ஐ உடைய அலகு அணியாகும்.

ஓர் அணியை திசையிலி கொண்டு பெருக்குதல் (Multiplication of a matrix by a scalar)

அணி A = (aij) எனில், K என்பது ஒரு திசையிலி எனில், KA என்கிற திசையிலியால் பெருக்கப்பட்ட அணி பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

KA= (Kaij) அனைத்து i, j க்களுக்கும்

A = (aij) என்கிற அணியை K (திசையிலி) என்ற எண்ணால் பெருக்குதல் என்பது, அவ்வணியில் உள்ள அனைத்து மூலகங்களையும் K -ஆல் பெருக்குவதற்கு ஒப்பாகும்.

அணியின் எதிர்மறை (Negative of a matrix)

A = (aij)m×n என்ற அணியின் எதிர்மறையை, - A = (– aij)m×n என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது அவ்வணியில் உள்ள அனைத்து மூலகங்களின் குறியீடுகள் + லிருந்து - ஆகவும், - லிருந்து + ஆகவும் மாற்றப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக

If $A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 7\\0 & 5 & 6\end{bmatrix}$ எனில்

$$-A = \begin{bmatrix}-2 & 5 & -7\\-0 & -5 & -6\end{bmatrix}$$

அணிகளின் சமத்துவம்

இரண்டு அணிகள் பின்வரும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டால் இவ்விரண்டு அணிகளும் சமஅணிகள் எனப்படும்.

(i) இரண்டு அணிகளின் வரிசைகளும் சமமாக இருத்தல்

(ii) ஒத்த இடத்தில் அமைந்த மூலகங்களின் மதிப்புக்கள் சமமாக இருத்தல்

அணிகளின் கூட்டல்

இரண்டு அணிகளின் வரிசைகள் சமமாக இருப்பின் (கூட்டலுக்கு உகந்தது) அவற்றின் ஒத்த மூலங்களை கூட்டி பெறப்பட்ட அணி, மேற்குறிப்பிட்ட அணிகளின் கூட்டலாகும்.

அணிகளின் கூட்டல் பண்புகள்

A, B மற்றும் C ஒரே வரிசையுடைய அணிகளாகக் கருதவும். அணிகளின் கூட்டல் பின்வரும் விதிகளுக்கு உட்பட்டது.

(i) மாற்று விதி Commutative law : **A + B = B + A**

(ii) சேர்ப்பு விதி Associative law : **A + (B + C)= (A + B) + C**

(iii) பங்கீட்டு விதி Distributive law : **K (A+B) = KA+KB,** (K எண்ணைக் குறிக்கிறது)

அணிகளின் கழித்தல்

இரு அணிகள் ஒரே வரிசையாக அமையும்போது மட்டுமே அவற்றின் கழித்தல் வரையறுக்கப்படுகிறது.

A, B ஆகிய அணிகள் ஒரே வரிசையுடையதாகக் கருதவும். A - B என்பது, B அணியின் மூலகங்களை, ஹ அணியின் ஒத்த மூலகங்களிலிருந்து கழித்து பெறப்படுவதாகும்.

அணிகளின் பெருக்கல்

முதல் அணியின் (A) நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், இரண்டாம் அணியின் (B) நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்கும்போது மட்டுமே (பெருக்கலுக்கு உகந்தது) இவ்விரு அணிகளின் பெருக்கல் A B வரையறுக்கப்படுகிறது.

A = (aij) என்கிற அணி $m \times p$ வரிசையுடையதாகவும்,

B = (bij) என்கிற அணி $p \times n$ வரிசையுடையதாகவும் கருதவும்.

பின்பு இவற்றின் பெருக்கல் AB என்பது $m \times n$ தரமுடைய $C = (cij)$ என்ற அணியாகும். இங்கு Cij $Cij = A$ **–ன்** i ஆம் நிரையின் மூலகங்களையும், B -ன் த ஆம் நிரலின் மூலகங்களையும் முறையே பெருக்கி பின்பு அவற்றைக் கூட்டி பெற்ற மதிப்பாகும்.

அணிகளின் பெருக்கல் பற்றிய பண்புகள்

1. அணிகளின் பெருக்கல் பொதுவாக மாற்று விதிக்கு உட்பட்டதல்ல. அதாவது A, B என்ற இரு அணிகளுக்கு $AB \neq BA$.

2. அணிகளின் பெருக்கல் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டது. அதாவது $(AB)\,C = A(BC)$

3. அணிகளின் பெருக்கல் கூட்டலின் அடிப்படையில் அமைந்த பங்கீட்டு விதிக்கு உட்பட்டது. அதாவது, A என்பதை $m \times n$ வரிசையுள்ள தரமுள்ள அணியாகவும், B மற்றும் C ஆகியவற்றை $n \times k$ வரிசையுள்ள அணிகளாகவும் கொண்டால், $A\,(B + C) = AB + AC$

4. A என்பது n வரிசையுள்ள சதுர அணியாகவும், I என்பது அதே வரிசையுள்ள அலகு அணியாகவும் இருப்பின், $AI = A = I\,A$

5. $AB = O$ என அமையும்பொழுது, A அல்லது B இரண்டு அணிகளுமே பூஜ்ஜிய அணிகளாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

பரிமாற்று அணி (Transpose of a matrix)

$A = (aij)$ என்பதை m x n வரிசையுள்ள அணியாக கருதவும். இவ்வணியின் நிரைகளை, நிரல்களாகவும் அல்லது நிரல்களை, நிரைகளாகவும் மாற்றி பெறப்படும் அணி A ன் பரிமாற்று அணி எனப்படும். n x m வரிசையுள்ள இப்பரிமாற்ற அணி, A^T எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, எனில்

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

பரிமாற்று அணியின் பண்புகள்

A^T, B^T என்பன A மற்றும் B -க்களின் பரிமாற்ற அணிகளாகவும், α என்பதை ஓர் எண்ணாகவும் கருதும் பொழுது

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(\propto A)^T = \propto A^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$ (A, B பெருக்கலை அனுசரிக்கும் பொழுது)

எடுத்துக்காட்டு 1

A= $\begin{bmatrix} 5 & 9 & 6 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 4 & -8 & -3 \end{bmatrix}$ **எனில் A + B and A-B -யைக் காண்க**

தீர்வு :

$$A + B = \begin{bmatrix} 5+6 & 9+0 & 6+7 \\ 6+4 & 2+(-8) & 10+(-3) \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 13 \\ 10 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-6 & 9-0 & 6-7 \\ 6-4 & 2-(-8) & 10-(-3) \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-6 & 9-0 & 6-7 \\ 6-4 & 2+8 & 10+3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -1 \\ 2 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 2

A= $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ **எனில்** (i) 3A (ii) - $\frac{1}{3}$A **--யைக் காண்க**

தீர்வு :

(i) $3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 6 \end{bmatrix}$

(ii) $-\frac{1}{3}A = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

எடுத்துக்காட்டு 3

$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\4 & 7 & 9\\1 & 6 & 4\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\4 & 2 & 5\\6 & -2 & 7\end{bmatrix}$ **எனில்** 5(A+B) = 5A+5B - **யைக் காண்க**

தீர்வு :

$A+B=\begin{bmatrix}5 & 4 & 7\\8 & 9 & 14\\7 & 4 & 11\end{bmatrix}$ $\therefore 5(A+B)=\begin{bmatrix}25 & 20 & 35\\40 & 45 & 70\\35 & 20 & 55\end{bmatrix}$

$5A=\begin{bmatrix}10 & 15 & 25\\20 & 35 & 45\\5 & 30 & 20\end{bmatrix}$ and $5B=\begin{bmatrix}15 & 5 & 10\\20 & 10 & 25\\30 & -10 & 35\end{bmatrix}$

$\therefore\ 5A+5B=\begin{bmatrix}25 & 20 & 35\\40 & 45 & 70\\35 & 20 & 55\end{bmatrix}$ $\therefore 5(A+B)=5A+5B$

எடுத்துக்காட்டு 4

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\3 & 6 & 9\end{bmatrix}$ **எனில்** $B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -4\\-1 & -2 & -4\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ AB **மற்றும் BA யைக் காண்க மற்றும் AB ≠ BA என்பதை நிறுவுக.**

தீர்வு:

AB=

$$\begin{bmatrix}1(-1)+ & 2(-1)+ & 3(1) & 1(-2)+ & 2(-2)+ & 3(2) & 1(-4)+ & 2(-4)+ & 3(4)\\2(-1)+ & 4(-1)+ & 6(1) & 2(-2)+ & 4(-2)+ & 6(2) & 2(-4)+ & 4(-4)+ & 6(4)\\3(-1)+ & 6(-1)+ & 9(1) & 3(-2)+ & 6(-2)+ & 9(2) & 3(-4)+ & 6(-4)+ & 9(4)\end{bmatrix}$$

$AB=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}$

இது போன்றே, $BA=\begin{bmatrix}-17 & -34 & -51\\-17 & -34 & -51\\17 & 34 & 51\end{bmatrix}_{3\times 3}$

$\therefore\quad AB \neq BA$

எடுத்துக்காட்டு 5

$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -4\end{bmatrix}$ **எனில் A2 – 5A + 3 ஐ -யைக் கணக்கிடுக.**

தீர்வு :

$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}$

$5A = 5 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 15 & -20 \end{bmatrix}$

$3I = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ A 2 - 5A+3I= $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 15 & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -10 & 16 \\ -24 & 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 16 \\ -24 & 33 \end{bmatrix}$

எடுத்துக்காட்டு 6

பின்வரும் அணிகளைக் கொண்டு $(AB)^T = B^T A^T$ என்பதை நிறுவுக.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

தீர்வு

$AB = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1(2) + & -4(0) + & 2(-4) & 1(-3) + & -4(1) + & 2(-2) \\ 4(2) + & 0(0) + & 1(-4) & 4(-3) + & 0(1) + & 1(-2) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 + & 0 + & -8 & -3 + & -4 + & -4 \\ 8 + & 0 + & -4 & -12 + & 0 + & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 & -11 \\ 4 & -14 \end{bmatrix}$

$\therefore$ L.H.S $(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -6 & -11 \\ 4 & -14 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -11 & -14 \end{bmatrix}$

$$\text{R.H.S}= B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -11 \\ 4 & -14 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ **$(AB)^T = B^T A^T$**

அணிக்கோவைகள்

சதுர அணிக்கு வரையறுக்கப்பட்ட அணிக்கோவைகள் அணி இயற்கணிதத்தின் ஒரு முக்கிய பகுதியாக அமைகின்றன. அணிக் கோவைகளின் கருத்துக்கள் குறிப்பிடத்தக்க அளவிற்கு அணி இயற்கணிதத்தில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அணிக்கோவை

சதுர அணி $A = (a_{ij})$ -ன் தொடர்புடைய அணிக்கோவையின் மதிப்பு ஓர் எண்ணாக அமையும். அவ்வெண், மெய்யெண்ணாகவோ, சிக்கெலண்ணாகவோ மற்றும் மிகை எண்ணாகவோ அல்லது குறை எண்ணாகவோ அல்லது பூஜ்ஜியமாகவோ அமையலாம். ஒரு அணியின் அணிக்கோவையை $|A|$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம். அணி என்பது உறுப்புகளின் செவ்வக வடிவமைப்பு (array) ஆகும். ஆனால் அணிக்கோவை என்பது ஓர் எண் அளவு (numerical value) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ எனில் A – யின் அணிக்கோவை

$|A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ –இன் மதிப்பு == **ad- bc**

எடுத்துக்காட்டு 7

$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$ **இன் மதிப்பைக் காண்க.**

தீர்வு:

$|A| = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$= 1\times(-2) - 3\times(-1) = -2 - (-3)$

$= -2+3 = 1$

எடுத்துக்காட்டு 8

$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{9} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{vmatrix}$ **இன் மதிப்பைக் காண்க.**

தீர்வு:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \\ 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 2(-1\times8-1\times7) – 0\ (5\times 8 - 9 \times 1)+ 4\ (5\times 7 - (-1) \times 9)$

$=2(-8-7) – 0\ (40-9) + 4\ (35+9)$

$=-30-0+176 = 146$

அணிக்கோவைகளின் பண்புகள்

1. ஓர் அணிகோவையின் நிரைகளை, நிரல்களாகவோ அல்லது நிரல்களை, நிரைகளாகவோ மாற்றும்பொழுது, அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு மாறாதிருக்கும்.

2. ஓர் அணிக்கோவையில் இரண்டு நிரல்கள் (நிறைகள்) இடமாற்றம் செய்யப்படும் பொழுது, அவ்வணிக்கோவை மதிப்பின் குறி மாறும்.

3. ஓர் அணிக்கோவையில் இரண்டு நிரல்கள் (நிரைகள்) சமமாக இருப்பின், அவ்வணிக்கோவை மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

4. ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் ஒரு நிரலின் (நிரையின்) உறுப்புகள் ஓர் எண்ணால் (k) பெருக்கப்பட்டால் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பும் அவ்வெண்ணால் பெருக்கப்படுகிறது.

5. ஒரு நிரையில் அல்லது நிரலிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் மற்றொரு நிரலின் அல்லது நிறையின் முறையான உறுப்புகளை ஓர் அளவையால் (Scalar) பெருக்கிக் கூட்டினால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

6. ஒரு நிரலில் அல்லது ஒரு நிரையில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும், இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருப்பின், அந்த அணிக்கோவை இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணிக்கோவைகளின் கூடுதலாக அமையும்.

7. இரண்டு நிரல்கள் (நிரைகள்) விகித சமத்தில் இருப்பின், அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

பூஜ்ஜியக்கோவை அணி (Singular Matrix)

A என்ற சதுர அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமெனில் அவ்வணி பூஜ்ஜியக்கோவை அணி ஆகும் அவ்வாறில்லையெனில், பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 9

$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$ **- ஐ பூஜ்ஜியக்கோவை அணி எனக் காட்டுக.**

தீர்வு :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1\times 4) - (2\times 2)$

$= 4 - 4$

$= 0$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட அணி பூஜ்ஜியக்கோவை அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10

$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{9} & \mathbf{10} \end{vmatrix}$ **– ஐ பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி எனக் காட்டுக.**

தீர்வு :

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = (2\times 10) - (5\times 9)$

$= 20 - 45$

$= -25 \neq 0$ எனவே கொடுக்கப்பட்ட அணி பூச்சியமற்ற கோவை அணியாகும்.

ஓர் அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a matrix)

ஓர் அணிக்கோவையின் உறுப்புகளின் சிற்றணிகள் மற்றும் இணைக் காரணிகள்

A என்ற அணிக்கோவையின் யதை என்ற ஓர் உறுப்பின் சிற்றணி (Minor) என்பது A இல் இருந்து Mij உள்ள நிரை, நிரல்களை விடுத்துப் பெறப்படும் அணிக்கோவை ஆகும். அதை Mij எனக் குறிப்போம். ஆதை என்பது aij இன் சிற்றணி எனில் aij - இன் இணைக் காரணி (cofactor) Cij என்பது கீய்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$C_{ij} = \begin{matrix} M_{i\,j}\,, if\ i+j \\ -M_{i\,j}\,, if\ \ i+j \end{matrix}$$

இரட்டைப்படை எண் எனில்

ஒற்றைப்படை எண் எனில்

அதாவது இணைக் காரணிகள், குறியிடப்பட்ட சிற்றணிகள் ஆகும்.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையில்

$M_{11} = a_{22}$; $M_{12} = a_{21}$, $M_{21} = a_{12}$, $M_{22} = a_{11}$

மேலும் $C_{11} = a_{22}$, $C_{12} = - a_{21}$, $C_{21} = - a_{12}$, $C_{22} = a_{11}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையில்

$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ $C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ $C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $C_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

ஒரு சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி (Adjoint of a square matrix)

A என்ற சதுர அணியின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அணிக்கோவை $|A|$ இல் அந்த உறுப்பின் இணைக் காரணியால் பதிலீடு செய்து பெறப்படும் அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி, A யின் சேர்ப்பு அணி ஆகும். ஆதனை Adj A என்று குறிப்போம்.

அதாவது $\mathbf{AdjA = A^T_c}$

குறிப்பு :

(i) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$ எனில், $\mathbf{A_c} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & -\boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$

$\therefore$ Adj A = A^T_C = $\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$

எனவே $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என்ற 2×2 சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணியை $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ என உடனடியாக எழுதலாம்.

Adj I = I, இதில் I என்பது ஓரலகு அணி**.**

(iii) A (Adj A) = (Adj A) A = | A | I

(iv) Adj (AB) = (Adj B) (Adj A)

(v) A என்பது வரிசை **2** உடைய சதுர அணியெனில், |Adj A| = |A|

A என்பது வரிசை **3** உடைய சதுர அணியெனில், |Adj A| = $|A|^2$

எடுத்துக்காட்டு 11

A = $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$ **என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியை எழுதவும்.**

தீர்வு :

Adj A = $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

எடுத்துக்காட்டு 12

A = $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ **என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.**

தீர்வு

A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ = Adj A = A^T_c

இதில்,

$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$, $C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, ` $C_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$ $C_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$,

$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, ` $C_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$ ` $C_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$$\therefore \mathbf{A_c} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

எனவே, $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

பூச்சியக் கோவை அணியாக இல்லாத அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a non - singular matrix)

A என்ற பூச்சியக்கோவை அணியாக இல்லாத அணியின் நேர்மாறு அணி என்பது $AB = BA = I$ என அமையும். B என்ற அணி ஆகும். B ஐ A^{-1} என குறிப்போம்.

குறிப்பு :

1. சதுர அணி அல்லாத அணிக்கு நேர்மாறு கிடையாது.
2. $|A| \neq 0$ என இருந்தால் மட்டுமே A என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இருக்கும். அதாவது A ஒரு பூச்சியக் கோவை அணி எனில் A^{-1} கிடையாது.
3. B என்பது A இன் நேர்மாறு எனில் A என்பது B இன் நேர்மாறு ஆகும். அதாவது $B = A^{-1}$ எனில் $A = B^{-1}$ ஆகும்.
4. $A\,A^{-1} = I = A^{-1}\,A$
5. ஓர் அணிக்கு நேர்மாறு இருக்குமானால் அது ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்ததாகும். அதாவது எந்த அணிக்கும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்மாறுகள் இருக்காது.
6. A^{-1} இன் வரிசையும் A இன் வரிசையும் சமமாக இருக்கும் .
7. $I^{-1} = I$
8. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, (நேர்மாறு இருக்குமேயானால்)
9. $A^2 = I$ எனில் $A^{-1} = A$ ஆகும்.
10. $AB = C$ எனில்

    (a) $A = CB^{-1}$ (b) $B = A^{-1}C$, (நேர்மாறு இருக்குமேயானால்)
11. $A(\text{Adj}A) = (\text{Adj}A)A = |A|\,I$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$\therefore$ **A** $\frac{1}{|A|}$ **(Adj A) =** $\frac{1}{|A|}$ **(Adj A) A= I**

எனவே, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ (Adj A). அதாவது, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_c^t$

எடுத்துக்காட்டு 13

A= $\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ **என்ற அணிக்கு நேர்மாறு அணி இருக்குமானால் அதனைக் காண்க.**

தீர்வு :

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (5\times 2) - (3 \times 4) = 10\text{-}12 = -2$

$\therefore$ $\mathbf{A^{-1}}$ உள்ளது.

$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

எடுத்துக்காட்டு 14

(i) A= $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

(ii) A= $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு நேர்மாறு அணிகள் கிடையாது எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

(i) $|A| = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} = 0$ $\therefore$ $\mathbf{A^{-1}}$ **கிடையாது.**

(ii) $|A| = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{bmatrix} = 0$ $\therefore$ $\mathbf{A^{-1}}$ **கிடையாது.**

எடுத்துக்காட்டு 15

A= $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$ **என்ற அணிக்கு நேர்மாறு அணி இருக்குமானால் அதனைக் காண்க.**

தீர்வு :

$|A| = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} = \mathbf{15 \neq 0}$ $\therefore$ **A^{-1} உள்ளது.**

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_c^t$

$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$ $C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7,$ $C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 10,$ ` $C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8$ $C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$ ` $C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10$ ` $C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -5$

எனவே,

$$A_c = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 10 & -8 & 1 \\ -5 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A_c^t = \begin{bmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 7 & -8 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_c^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 7 & -8 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 16

பின்வரும் சமன்பாட்டை நேர்மாற்று அணி முறையில் தீர்வு காண்க

x+2y=6

3x+4y=16

தீர்வு

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A \times X = B}$

$\mathbf{X = A^{-1}B}$

$|A| = 1 \times \mathbf{4 - 3 \times 2 = 4 - 6 = -2}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_c^t$

adj $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 16 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \times 6 & + & -2 \times 16 \\ -3 \times 6 & + & 1 \times 16 \end{bmatrix}$

$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 24 - 32 \\ -18 + 16 \end{bmatrix}$

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{4}{1}\right)$$

$x = 4$

$y = 1$

எடுத்துக்காட்டு 17

பின்வரும் சமன்பாட்டை நேர்மாற்று அணி முறையில் தீர்வு காண்க

$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9$

$x_1 + x_2 + x_3 = 9$

$3x_1 - x_2 - x_3 = 1$

தீர்வு

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\1 & 1 & 1\\3 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x1\\x2\\x3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\9\\1\end{bmatrix}$$

A × X= B

X= A^{-1}B

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^t_c$

$$|A| = +(2)\begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & -1\end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & -1\end{vmatrix}$$

$= 2[1\times(-1) - (-1\times 1)]-3[1\times(-1) - 3\times 1] - 1[1\times(-1) - 3\times 1]$

=2[-1+1]-3[-1-3]-1[-1+3]

=2(0)-3(-4)-1(-4)

=0+12+4

=16

adj A = A^t_c

$$A^t_{c=}\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\3 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & -1\\-1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}+(-1+1)-(-1-3)+(-1-3)\\-(-3-1)+(-2+3)-(-2-9)\\+(3+1)-(2+1)+(2-3)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 4 & -4\\4 & 1 & 11\\4 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

adj A= $A^t_{c=}\begin{bmatrix}0 & 4 & 4\\4 & 1 & -3\\-4 & 11 & -1\end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 11 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} (0\times 9)+(4\times 9)+(4\times -1) \\ (4\times 9)+(1\times 9)+(-3\times -1) \\ (-4\times 9)+(11\times 9)+(-1\times -1) \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0+36-4 \\ 36+9+3 \\ -36+99+1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 32 \\ 48 \\ 64 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x_1 = 2$

$x_2 = 3$

$x_3 = 4$

பயிற்சி வினாக்கள்

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$ மற்றும் $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{9} & \mathbf{6} \\ \mathbf{11} & \mathbf{8} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$ எனில், A+B, A-Bன் மதிப்பு என்ன?

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ மற்றும் $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ எனில், A+B, A-Bன் மதிப்பு என்ன?

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ எனில், **3A,-A,-3A ,** $\frac{1}{2}\mathbf{A}$ மதிப்பு என்ன?

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ மற்றும் $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ எனில்,

i. **A+B=B+A**

ii. **A+(B+C)=(A+B)+C**

iii. **4(A+B)=4A+AB**

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், ABன் மதிப்பு என்ன?

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், **AB≠BA** என்று நிரூபி

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், **AB≠BA** என்று நிரூபி

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -7 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

A(B+C)=AB+AC என்று நிரூபி

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், $\mathbf{A^2 - 3A + 2I = 0}$ என்று நிரூபி

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ எனில், $(\boldsymbol{A^t})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{A}$ என்று நிரூபி

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

a. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{A^t} + \boldsymbol{B^t}$

b. $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{A^t} - \boldsymbol{B^t}$ என்று நிரூபி

12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ எனில், $(\boldsymbol{3A})^{\boldsymbol{t}} = \mathbf{3}\,\boldsymbol{A^t}$ என்று நிரூபி

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ எனில், $|\boldsymbol{A}|$ ன் மதிப்பு என்ன?

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ மதிப்பிடுக

15. **A=** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ எனில், Adj A யை கண்டுபிடி

16. **A** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$ நேர்மாற்று அணியை கண்டுபிடி

17. **A =** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ எனில், $\boldsymbol{A^{-1}}$ யை கண்டுபிடி

18. **A =** $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ எனில், **A.** $\boldsymbol{A^{-1} = A^{-1}.A = I}$ என்று நிரூபி

19. Solve the following equation by matrix inversion technique

x+2y=6

3x+4y=16

20. Solve by matrix method

$2x_1+3x_2-x_3=9$

$x_1+x_2+x_3=9$

$3x_1-x_2-x_3=1$

விடைகள்

1. $A+B= \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} & \mathbf{13} \\ \mathbf{13} & \mathbf{12} & \mathbf{15} \end{pmatrix}$

$A-B= \begin{pmatrix} \mathbf{-9} & \mathbf{-6} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

2. $A+B= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

$A-B= \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

3. $3A=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ -3 & -9 & -6 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$-3A=\begin{pmatrix} -9 & -6 & -3 \\ 3 & 9 & 6 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$-A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

4.

i. **A+B=B+A** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ (நிருபிக்க முடியும்)

ii. **A+(B+C)=(A+B)+C** $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ (நிருபிக்க முடியும்)

iii. **4(A+B)=4A+AB** $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 12 & 20 \\ 24 & 4 \end{pmatrix}$ (நிருபிக்க முடியும்)

5. **AB** $=\begin{pmatrix} 11 & 25 \\ 29 & 66 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

6. **AB**$=\begin{pmatrix} -46 & 4 & 42 \\ -12 & 32 & -9 \\ 48 & 92 & -63 \end{pmatrix}$

BA$=\begin{pmatrix} -16 & 58 & 26 \\ 4 & -64 & 56 \\ 49 & -18 & 3 \end{pmatrix}$

7. $AB=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 14 & 10 & 18 \\ -8 & -9 & -15 \end{pmatrix}$

A(B+C)=AB+AC (நிருபிக்க முடியும்)

9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **A^2 -3A+2I = 0** (நிருபிக்க முடியும்)

10. A^t $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ (நிருபிக்க முடியும்)

11. $(A + B)^t = A^t + B^t$ (நிருபிக்க முடியும்)

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$

$(A - B)^t = A^t - B^t$ (நிருபிக்க முடியும்)

$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

12. $(3A)^t$ = 3 A^t `(நிருபிக்க முடியும்)

$\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 15 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$

13. $|A| = -3$

14. $|A|$ = **-4**

15. Adj A $= \begin{pmatrix} -7 & 4 & 13 \\ 11 & -2 & -14 \\ 13 & -1 & -22 \end{pmatrix}$

16. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{5}{23} & \frac{2}{23} \end{pmatrix}$

17. $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (நிருபிக்க முடியும்)

19. x= 4 and y= 1

20. $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$